А. Ш. АКЫШ

(Институт математики и математического моделирования, МОН РК КН, г. Алматы, Республика Казахстан)

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА[1]

Аннотация

В работе показана справедливость принципа максимума для уравнений Навье-Стокса (УНС). На основе чего в выбранном пространстве доказаны единственность слабых и существование сильных решений задачи для УНС в целом по времени $t \in [0, T], \forall T < \infty$.

Ключевые слова: Системы нелинейных уравнений Навье–Стокса, принцип максимума для уравнений Навье–Стокса, единственность слабых решений уравнений Навье–Стокса, существование сильных решений уравнений Навье–Стокса.

Кілт сөздер: бейсызықты Навье–Стокс теңдеулерінің жүйесі, Навье–Стокс теңдеулері үшін максимум қағидасы, Навье–Стокс теңдеулерінің әлсіз шешуінің жалқылығы, Навье–Стокс теңдеулерінің әлді шешуінің болатындығы.

Keywords: nonlinear Navier-Stokes equations system, the principle of maximum for Navier-Stokes equations, uniqueness of weak generalized solutions of Navier-Stokes equations, existence of strong solutions of Navier-Stokes equations.

Введение. Основные нерешенные проблемы теории уравнений Навье-Стокса однородной жидкости приведены в [1–3] и др. В частности, в монографии О. А. Ладыженской ([1], стр. 13) при-ведены нерешенные проблемы математической теории уравнений Навье-Стокса. По-видимому, среди них главной является:

«*Имеет ли место однозначная разрешимость "в целом" общей трехмерной начально-краевой задачи в каком-либо классе обобщенных решений без предположений малости об известных функциях и областях, заполненных жидкостью*?»

В ряде работ автора [7–9] и др. приведены результаты поисковых исследований с целью обос-нования принципа максимума для УНС. В итоге показана справедливость принципа максимума для УНС, что с математической точки зрения является ключевым.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Казахстанского фонда фундаментальных исследований, проект №0112РК00832.

Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для УНС [1] относительно вектора скорости $\mathbf{U}=(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,\mathrm{U}_3)$ и давления P в области $\mathrm{Q}=(0,\mathrm{T}]\times\Omega$:

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}-\mu\Delta\mathbf{U}+(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}+\nabla\mathrm{P}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \tag{1a}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{U}=0, \tag{1b}$$

$$\mathbf{U}(0,\mathbf{x})=\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \tag{1c}$$

$$\mathbf{U}(t,\mathbf{x})\big|_{\partial\Omega}=0,\ \ \mathbf{x}\in\partial\Omega, \tag{1d}$$

где $\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathrm{R}_3$; $\Omega-$ выпуклая область, заполненная однородной жидкостью, а $\partial\Omega-$ граница области Ω, $t\in[0,\mathrm{T}]$, $\mathrm{T}<\infty$; $0<\mu-$ динамический коэффициент вязкости; Δ, $\nabla-$ операторы Лапласа и Гамильтона соответственно. Пусть $\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{J}}(\Omega)-$ пространство соленоидальных векторов, а $\mathbf{G}(\Omega)$ состоит из $\nabla\eta$, где η есть однозначная в Ω функция. Известно [4], ортогональное разложение, $\mathbf{L_2}(\mathrm{Q})=\mathbf{G}(\mathrm{Q})\oplus\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q})$, причем элементы $\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q})$ при $\forall t$ принадлежат $\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{J}}(\Omega)$; $\mathbf{f}$ и $\mathbf{\Phi}$ – вектор функции соответственно внешних сил и начальных данных удовлетворяющие следующим требованиям:

i) $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\in\mathbf{C}(\overline{\mathrm{Q}})\bigcap\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q})$; **ii)** $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\in\mathbf{C}(\overline{\Omega})\bigcap\mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega)\bigcap\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{J}}(\Omega)$.

Принцип максимума. Векторное уравнение (1a) перепишем в виде системы скалярных уравнений:

$$\frac{\partial\mathrm{U}_\alpha}{\partial t}-\mu\Delta\mathrm{U}_\alpha+(\mathbf{U},\nabla\mathrm{U}_\alpha)+\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial x_\alpha}=\mathrm{f}_\alpha,\ \alpha=\overline{1,3}, \tag{2}$$

где $(\cdot\,,\,\cdot)-$ скалярное произведение векторов.

Теорема 1. *Пусть* $\overline{\Omega}$ *замкнутая ограниченная область в* R_3 *с границей* $\partial\Omega$, *и* $\mathrm{Q}=[0,\mathrm{T}]\times\overline{\Omega}$ *–цилиндрическая область в пространстве переменных* **t**, **x**. *Предположим, что функции* $\mathbf{U}\in\mathrm{C}(\overline{\mathrm{Q}})\bigcap\mathrm{C}^2(\mathrm{Q})\wedge\mathrm{P}\in\mathrm{C}^1(\mathrm{Q})$ *и удовлетворяют уравнениям (1a), (1b). Тогда, если при неко-тором* α *функция* $\mathrm{f}_\alpha(t,\mathbf{x})\le 0\ (\mathrm{f}_\alpha(t,\mathbf{x})\ge 0)$ *в* Q, *то функция* U_α *принимает свой положительный максимум (отрицательный минимум) в цилиндре Q на нижнем основании* $\{0\}\times\overline{\Omega}$ *или на его боковой поверхности* $[0,\mathrm{T}]\times\partial\Omega$, *т. е.*

$$\mathrm{U}_\alpha(t,x)\le\max\{\sup_{t=0\wedge x\in\overline{\Omega}}\mathrm{U}_\alpha(t,x),\ \sup_{t\in[0,\mathrm{T}]\wedge x\in\partial\Omega}\mathrm{U}_\alpha(t,x)\},\quad (t,x)\in\overline{\mathrm{Q}}, \tag{3a}$$

$$\Big(\mathrm{U}_\alpha(t,x)\ge\min\{\inf_{t=0\wedge x\in\overline{\Omega}}\mathrm{U}_\alpha(t,x),\ \inf_{t\in[0,\mathrm{T}]\wedge x\in\partial\Omega}\mathrm{U}_\alpha(t,x)\},\quad (t,x)\in\overline{\mathrm{Q}}\Big),\ \alpha=\overline{1,3}. \tag{3b}$$

Для доказательства теоремы 1 нам нужны некоторые вспомогательные утверждения[2].

Введем обозначение

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{U} - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

и применим операцию *div* к векторному уравнению (1a). Тогда, с учетом (1b), получаем задачу Неймана для уравнения Пуассона, связывающее давление P с вектором скорости U:

$$-\Delta P = \mathrm{div}\mathbf{I}, \quad \left.\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T], \text{ где } \mathbf{I} = (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} \tag{4}$$

так как $\mathbf{Rn}|_{\partial\Omega} = 0$ и $\mathbf{In}|_{\partial\Omega} = 0$ соответственно в силу $\mathbf{R} \in \overset{0}{\mathbf{J}}(\Omega)$ и (1d), где $\mathbf{n}$ есть единичный вектор внешней нормали в точке $\mathbf{x}$ границы $\partial\Omega$.

По условию теоремы 1 функция $div\mathbf{I}$ непрерывна в ограниченной области Ω при $\forall t \in [0, T]$, тем самым

$$div\mathbf{I} \in L_p(\Omega), \ p \geq 1 \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{5}$$

Кроме того $\int\limits_{\Omega} div\mathbf{I}d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{In}d\mathbf{x} = 0$, т.е. выполнено необходимое и достаточное условие разре-шимости задачи Неймана (4).

Решение задачи (4) представим в виде объемного потенциала

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{div}\mathbf{I}(\xi)}{r(\mathbf{x}, \xi)} d\xi, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{6}$$

Следуя [5], отметим одно общеизвестное свойство объемного потенциала (6).

***Лемма 1**. Если для плотности* $div\mathbf{I}$ *имеет место (5), то функция* $P(\mathbf{x})$*, определяемая формулой (6), гармонична в каждой из областей, дополнительных к* Ω.

Доказательство. Ясно, что внутри области Ω существует конечное или счетное множество областей Ω_j, $j = 1, 2, \cdots$, дополнительных к Ω. Пусть $\Omega_j -$ одна из этих областей. Возьмем произвольную внутреннюю по отношению к Ω_j подобласть Ω_j^1 и пусть $\mathbf{x} \in \Omega_j^1$. Тогда в интеграле (6) расстояние r ограничено снизу положительным числом δ равным наименьшему расстоянию между точками границ областей Ω_j и Ω_j^1. Откуда следует, на основании известной теоремы о свойствах интеграла типа потенциала, что $P(\mathbf{x}) \in C^\infty(\Omega_j^1)$; так как Ω_j^1 произвольная внутренняя подобласть Ω_j, то $P(\mathbf{x}) \in C^\infty(\Omega_j)$ и, в частности,

[2] Эти утверждения будут доказываться в допущениях теоремы 1.

$$\Delta \mathrm{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{I})\ \Delta_{\mathbf{x}}\{\frac{1}{r(\mathbf{x},\xi)}\} \mathrm{d}\xi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{j}}, \tag{7}$$

т.е. функция P гармонична в области Ω_{j}. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для этого воспользуемся известным приемом [6, стр. 510]. Предположим от противного, т. е. функция $\mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ достигает своего максимального значения в некоторой точке $\mathrm{M}_0(\mathrm{t}^0,\mathbf{x}^0)$ внутри области $\overline{\mathrm{Q}} = [0,\mathrm{T}] \times \overline{\Omega}$.

$$\mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{M}_0) > \max\{ \sup_{\mathrm{t}=0 \wedge \mathrm{x} \in \overline{\Omega}} \mathrm{U}_{\alpha}(t,\mathbf{x}), \sup_{\mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}] \wedge \mathrm{x} \in \partial\Omega} \mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathbf{x}) \} = C \geq 0 \tag{8}$$

Обозначим $m = \mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{M}_0) - \mathrm{C} > 0$ и введем функцию

$$\mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathbf{x}) = \mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathbf{x}) + \frac{m}{2}(1 - \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}).$$

Отсюда при всех (t, **x**) из $\partial\Omega \times [0,\mathrm{T}]$ или $\{0\} \times \overline{\Omega}$ имеем

$$\mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{t}^0,\mathbf{x}^0) \geq \mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathbf{x}) + \frac{m}{2}.$$

То есть функция $\mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{t},\mathbf{x})$ также принимает свое максимальное значение в некоторой точке $M_1(\mathrm{t}^1,\mathrm{x}^1) \in Q$, причем $\mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{M}_1) \geq \mathrm{H}_{\alpha}(\mathrm{M}_0) \geq \mathrm{m}$. И пусть вместе с ним в момент времени t^1 функция P(t,**x**) в какой-нибудь другой точке $\mathbf{x}^e \in \Omega$ достигает своего экстремального значения.

Теперь построим внутреннюю область Ω_e, дополнительной к Ω так, чтобы точки $\mathrm{M}_1(\mathrm{t}^1,\mathbf{x}^1) \in \Omega_e$ и $\mathrm{M}(\mathrm{t}^1,\mathbf{x}^e) \in \Omega_e$. Тогда, используя утверждения леммы 1, получим $\nabla \mathrm{P}\big|_{\Omega_e} = 0$.

Теперь выпишем все необходимые условия максимума функции H_{α} в точке M_1:

$$\frac{\partial H_{\alpha}}{\partial t} \geq 0; \ \ \Delta \mathrm{H}_{\alpha} \leq 0; \ \nabla \mathrm{H}_{\alpha} = 0; \ \ \nabla \mathrm{P} = 0. \tag{9}$$

Из уравнения (2) с учетом условий (9) найдем для точки M_1 цепь неравенств

$$\mathrm{LH}_{\alpha} \equiv \frac{\partial \mathrm{H}_{\alpha}}{\partial t} - \mu\Delta\mathrm{H}_{\alpha} + (\mathbf{H},\nabla\mathrm{H}_{\alpha}) + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_{\alpha}}(\mathrm{M}_1) - \mathrm{f}_{\alpha} + \frac{m}{2\mathrm{T}} \geq \frac{m}{2\mathrm{T}} > 0.$$

Это означает, что неравенство (8) неверно. Следовательно, справедливо (3а). Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1, следуя [6], нетрудно получить доказательство следующего утверждения:

Следствие. *Если вектор-функций* $\mathbf{f}$, $\mathbf{\Phi}$ *удовлетворяют условиям* ***i)*** *и* ***ii),*** *то для решений* $\mathbf{U}(\mathrm{t},\mathbf{x})$ *задачи (1) справедлива оценка*

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(Q)} \le \|\mathbf{\Phi}\|_{\mathbf{C}(Q)} + \mathrm{T}\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}(Q)} = \mathrm{A}_1,\ \forall \mathrm{T} < \infty, \tag{10}$$

где $\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})} = \max\limits_{1\le\alpha\le3} \sup\limits_{\bar{Q}} |U_\alpha(\mathrm{t},\mathbf{x})|$.

Слабые обобщенные решения. Умножим уравнение (1а) на произвольную вектор-функцию $\mathbf{Z}(\mathrm{t},\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\overline{\mathrm{Q}}) \cap \mathbf{W}_2^1(\mathrm{Q}) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q})$, равную нулю при $(\mathrm{t}=\mathrm{T}) \wedge (\mathbf{x} \in \partial\Omega)$. Произведение проинтегри-руем по области Q и с помощью интегрирования по частям из первых двух и четвертого слагаемых производные перенесем с $\mathbf{U}$ на $\mathbf{Z}$. В результате получим

$$\int\limits_{\mathrm{Q}} \Big(-\mathbf{U}\,\mathbf{Z}_\mathrm{t} + \mu \sum_{\mathrm{k}=1}^{3} \nabla \mathrm{U}_\mathrm{k} \nabla \mathrm{Z}_\mathrm{k} + (\mathbf{U},\nabla)\,\mathbf{U}\,\mathbf{Z}\Big)\, \mathbf{dx}\,\mathrm{dt} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{\Phi}\,\mathbf{Z}(0,\mathbf{x})\,\mathbf{dx} + \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathbf{f}\,\mathbf{Z}\,\mathbf{dx}\mathrm{dt}. \tag{11}$$

Снова уравнения (1а) умножим на градиент произвольной однозначной функции $\eta \in \mathbf{L}_2(0,\mathrm{T};\mathrm{W}_2^1(\Omega))$. А затем проинтегрируем по области Q, используя из [4] ортогональности подпространств $\mathbf{G}(\mathrm{Q})$, $\overset{0}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q})$ в итоге находим тождество

$$\int\limits_{\mathrm{Q}} \nabla \mathrm{P}\, \nabla \eta\, \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{dt} = -\int\limits_{\mathrm{Q}} (\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\,\nabla\eta\ \mathbf{dx}\,\mathrm{dt}. \tag{12}$$

Определение[3]***1.*** *Назовем слабым обобщенным решением начально-краевой задачи Навье–Стокса (1) вектор-функцию* $\mathbf{U}$ *и функцию* P *из пространств*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{C}(\overline{\mathrm{Q}}) \cap \mathbf{L}_\infty(0,\mathrm{T};\mathbf{L}_2(\Omega)) \cap \mathbf{L}_2(0,\mathrm{T};\mathbf{W}_{2,0}^{1}(\Omega)) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q});$$

$$\mathrm{P} \in \mathrm{L}_2(0,\mathrm{T};\mathrm{W}_2^1(\Omega)) \wedge \Big(\int\limits_{\Omega} \mathrm{P}(\mathrm{t},\mathbf{x})\,\mathbf{dx} = 0, \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}]\Big) \tag{13}$$

и удовлетворяющие тождествам (11), (12) *при любых*

$$\mathbf{Z}(\mathrm{t},\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\overline{\mathrm{Q}}) \cap \mathbf{W}_2^1(\mathrm{Q}) \cap \overset{0}{\mathbf{J}}(\mathrm{Q}) \wedge \Big(\mathbf{Z}\,\big|_{(t=\mathrm{T})\wedge(\mathbf{x}\in\partial\Omega)} = 0\Big);\ \eta(\mathrm{t},\mathrm{x}) \in \mathrm{L}_2\big(0,\mathrm{T};\mathrm{W}_2^1(\Omega)\big).$$

Для справедливости этого определения все интегралы, входящие в (11),

(12) должны быть конечны для любых $\mathbf{Z}$, η из указанных классов.

Лемма 2 *[7-9]. Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям* ***i), ii),*** *то для слабых обобщенных решений задачи (1) справедливы оценки:*

[3] Здесь, благодаря принципу максимума, слабые решения рассматриваются в более узком классе функций, чем в [1].

$$\| \mathbf{U} \|^2_{\mathbf{L}_\infty((0,T];\mathbf{L_2}(\Omega))} \le 2 \| \mathbf{\Phi} \|^{\mathbf{2}}_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + 4\mathrm{T}^2 \ \| \mathbf{f} \|^2_{\mathbf{L}_\infty((0,T];\ \mathbf{L_2}(\Omega))} = \mathrm{A}, \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \int_0^t \left\| \nabla \mathrm{U}_k(\tau) \right\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} d\tau \le \frac{1}{\mu} \|\mathbf{\Phi}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \frac{2\mathrm{T}^2}{\mu} \|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}_\infty(0,\mathrm{T};\ \mathbf{L}_2(\Omega))} = \mathrm{A}_2, \tag{15}$$

$$\| \nabla \mathrm{P} \|^2_{\mathbf{L_2}(\mathrm{Q})} \le \| (\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U} \|^2_{\mathbf{L_2}(\mathrm{Q})} \le 9\mathrm{A}_1^2\, \mathrm{A}_2 \equiv \mathrm{A}_3. \tag{16}$$

Из принципа максимума и полученных априорных оценок следует единственность решения задачи (1):

Теорема 2 *[7–9]. Если входные данные* **f** *и* **Φ** *удовлетворяют соответственно требованиям* ***i), ii)****, тогда задача (1) имеет слабое единственное обобщенное решение* **U** *и* P *удовлетворяющие тождествам (11), (12) при любых* **Z** *и* η *из определения 1.*

Сильные решения.

Определение 2. *Если в области* Q *решение начально-краевой задачи Навье-Стокса (1) имеет всевозможные обобщенные производные того же порядка, что и сами уравнения, то это обоб-щенное решение называется сильным.*

Теорема 3*[7–9]. Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям* **i), ii)** *и граница области* $\partial\Omega \in \mathrm{C}^2$*, тогда у задачи (1) существует сильное единственное обобщенное решение* **U** *и* P *из пространств*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{W}^{\mathbf{2,1}}_{\mathbf{2,0}}(\mathrm{Q}) \cap \overset{\mathbf{0}}{\mathbf{J}}_\infty(\mathrm{Q})\,; \ \mathrm{P} \in \mathrm{L}_2(0,\mathrm{T};\mathrm{W}_2^2(\Omega)) \wedge (\int_\Omega \mathrm{P}dx = 0, \forall t \in [0,\mathrm{T}]),$$

удовлетворяющие уравнениям (1а) и почти всюду в Q *и для них имеют место оценки:*

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathrm{Q})} \le \mu \sum_{k=1}^{3} \| \nabla \Phi_k \|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + 5\mathrm{A}_3 + 2\mathrm{T} \| \mathrm{f} \|^2_{\mathbf{L}_\infty(0,\mathrm{T};\mathbf{L}_2(\Omega))} \equiv \mathrm{A}_5, \tag{17}$$

$$\| \Delta \mathbf{U} \|^2_{\mathbf{L_2}(\mathrm{Q})} \le \mathrm{A}_5 / \mu^2 \equiv \mathrm{A}_6, \tag{18}$$

$$\| \nabla \mathrm{U}_k \|^2_{\mathbf{L}_\infty(0,\mathrm{T};\mathbf{L_2}(\Omega))} \le \mathrm{A}_5 / \mu \equiv \mathrm{A}_7,\ k = \overline{1,3}; \tag{19}$$

$$\| \nabla \mathrm{P} \|^2_{\mathbf{L}_\infty(0,\mathrm{T};\mathbf{L_2}(\Omega))} \le 3\mathrm{A}_1^2\, \mathrm{A}_7 \equiv \mathrm{A}_{10}. \tag{20}$$

$$\| \mathbf{U} \|_{\mathbf{L}_2(0,\mathrm{T};\mathbf{W_2^2}(\Omega))} \le \mathrm{A}_8 \| \Delta \mathbf{U} \|_{\mathbf{L_2}(\mathrm{Q})}, \qquad \mathrm{A}_8 - const, \tag{21}$$

$$\| \mathrm{P} \|_{\mathrm{L}_2(0,\mathrm{T};\mathrm{W}_2^2(\Omega))} \le \mathrm{A}_p \| \Delta \mathrm{P} \|_{\mathbf{L}_2(\mathrm{Q})} \le \mathrm{A}_c \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{L_2}(0,\mathrm{T};\mathbf{W_2^2}(\Omega))},\ \mathrm{A}_p, \mathrm{A}_c - \mathrm{const}. \tag{22}$$

Замечание. Теорема 2 о единственности слабых обобщенных решений задачи (1) справедлива для их сильных и классических решений.

Автор выражает благодарность профессорам Л. А. Алексеевой и Н. И. Мартынову за некоторые заме-чания и полезные советы по улучшению математической строгости работы.

ЛИТЕРАТУРА

1 Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

2 Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование гладкость // УМН. – 2003. – **58**:2(350). – С. 45-78.

3 Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation // http: //claymath.org /Millenium Prize Problems/Navier-Stokes Equations. Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. P.1-5.

4 Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Сер. vатематическая. – 1954. – № 18. – С. 3-50.

5 Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. – 431 с.

6 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 520 с.

7 Akysh A.Sh. The maximum principle of the Navier-Stokes equation // http://www.ksu.kz / Вестник КарГУ им. академика Е. А. Букетова. – 2012. – № 2(66). – С. 4-16.

8 Akysh A.Sh. The maximum principle of the Navier-Stokes equation // USA. – 2012. – arXiv.org: 1204.2668v [math-ph]. – 16 page.

9 Акыш А.Ш. О принципе максимума для уравнений Навье-Стокса // Вестник Ошского государственного универ-ситета. – 2013. – № 1. – С. 32-37.

REFERENCES

1 Ladyzhenskaja O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti. – M.: Nauka, 1970. – 288 s.

2 Ladyzhenskaja O.A. Shestaja problema tysjacheletija: uravnenija Nav'e-Stoksa, sushhestvovanie gladkost' // UMN. – 2003. – 58:2(350). – S. 45-78.

3 Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation // http: //claymath.org / Millenium Prize Problems/Navier-Stokes Equations. Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. P.1-5.

4 Sobolev S.L. Ob odnoj novoj zadache matematicheskoj fiziki // Izvestija AN SSSR. Cer. vatematicheskaja. – 1954. – № 18. – S. 3-50.

5 Mihlin S.G. Linejnye uravnenija v chastnyh proizvodnyh. – M.: Vysshaja shkola, 1977. – 431 s.

6 Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoj fiziki. – M.: Nauka, 1976. – 520 s.

7 Akysh A.Sh. The maximum principle of the Navier-Stokes equation // http://www.ksu.kz / Vestnik KarGU im. akademika E. A. Buketova. – 2012. – № 2(66). – S. 4-16.

8 Akysh A.Sh. The maximum principle of the Navier-Stokes equation // USA. – 2012. – arXiv.org: 1204.2668v [math-ph]. – 16 page.

9 Akysh A.Sh. O principe maksimuma dlja uravnenij Nav'e-Stoksa // Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta. – 2013. – № 1. – S. 32-37.

Резюме

Ә. Ш. Ақыш

(ҚР БҒМ математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

НАВЬЕ-СТОКС ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ШЕШУІНІҢ ЭКСТРЕМАЛДЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӨНІНДЕ

Жұмыста үш өлшемді бейсызықты Навье-Стокс теңдеулері (НСТ) үшін максимум принципінің орында-латындығы көрсетілген. Осының негізінде таңдалынған кеңістікте НСТ-ға қойылған есептің барлық уақыт $t \in [0, T], \forall T < \infty$ аралығында әлсіз шешуінің жалқылығымен қоса әлді шешуінің болатындығы дәлел-денген.

Кілт сөздер: бейсызықты Навье–Стокс теңдеулерінің жүйесі, Навье–Стокс теңдеулері үшін максимум қағидасы, Навье–Стокс теңдеулерінің әлсіз шешуінің жалқылығы, Навье–Стокс теңдеулерінің әлді шешуінің болатындығы.

Summary

A. Sh. Akysh

(Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan,
Almaty, Republic of Kazakhsnat)

ABOUT EXTREME PROPERTIES OF THE SOLUTION OF EQUATIONS NAVIER-STOKES

In the work the validity of principle of maximum for the Navier-Stokes equations (NSE) is shown. On what basis in the chosen space are proved uniqueness of weak generalized solutions and existence of strong solutions of a problem for NSE as a whole on time $t \in [0, T], \forall T < \infty$.

Keywords: nonlinear Navier-Stokes equations system, the principle of maximum for Navier-Stokes equations, uniqueness of weak generalized solutions of Navier-Stokes equations, existence of strong solutions of Navier-Stokes equations.

Поступила 26.06.2013 г.