УДК 517.956

С. А. АЛДАШЕВ

(Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Республика Казахстан)

СОПРЯЖЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Аннотация. В работе для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости показана однозначная разрешимость сопряженной краевой задачи с отходом от характеристики.

Ключевые слова: задача, гиперболическое уравнение, характеристика, корректность.
Тірек сөздер: есеп, гиперболалық теңдеу, сипаттама, қисындылық.
Keywords: problem, hyperbolic equation, characteristic, well-posedness.

п. 1. Постановка задачи и результат. Пусть $D \subset R^2$ – конечная область , ограниченная отрезком $AB: 0 \le x \le 1$ оси $y = 0$, а при $y > 0$-отрезком $AF: y = x, 0 \le x \le h, 0 < h = const < 1/2$, гладкой кривой $FH: y = \gamma(x), h \le x \le l$, вдоль которой $0 < \gamma'(x) < 1, \gamma(h) = h, \gamma(l) = 1 - l$ и прямой $HB: y = 1 - x$.

В области D рассмотрим линейные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = 0, \tag{1}$$

$$A, B \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), C \in C(D).$$

В качестве сопряженной краевой задачи с отходом от характеристики рассмотрим следующую.

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющие краевым условиям

$$u\big|_{AB} = \tau(x), u\big|_{BH} = \sigma_1(x), u\big|_{FH} = \varphi(x), \tag{2}$$

или

$$u_y\big|_{AB} = \nu(x), u\big|_{BH} = \sigma_1(x), u\big|_{FH} = \varphi(x), \tag{3}$$

$$\tau(x), \nu(x) \in C^1(0 \le x \le 1) \cap C^2(0 < x < 1), \sigma_1(x) \in C^1(\ell \le x \le 1) \cap C^2(\ell < x < 1),$$
$$\varphi(x) \in C^1(h \le x \le l) \cap C^2(h < x < l),$$

которая встречается при исследовании трансзвуковых проблем [1].

В характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ уравнение (1) записывается следующим образом.

$$u_{\xi\eta} + au_\xi + bu_\eta + cu = 0, \tag{4}$$
$$4a(\xi,\eta) = A + B, 4b(\xi,\eta) = A - B, 4c(\xi,\eta) = C.$$

При этом краевые условия (2) и (3) соответственно имеют вид

$$u(\eta,\eta) = \tau(\eta),\ 0 \le \eta \le 1,\ u(\alpha(\eta),\eta) = \psi_2(\eta),\ 0 \le \eta \le \eta_0,\ u(1,\eta) = \psi_1(\eta),\ \eta_0 \le \eta \le 1, \tag{5}$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\Big|_{\xi=\eta}=\nu(\eta),\ 0\le\eta\le 1,\ u(\alpha(\eta),\eta)=\psi_2(\eta),\ 0\le\eta\le\eta_0,\ u(1,\eta)=\psi_1(\eta),\ \eta_0\le\eta\le 1, \quad (6)$$

где

$\psi_2(\eta)=\varphi\left(\frac{\eta}{2}+\frac{\alpha(\eta)}{2}\right)$, $\psi_1(\eta)=\sigma_1\left(\frac{1+\eta}{2}\right)$, а функция $\eta=\alpha(\eta)$ является решением уравнения $\xi=\eta+2\gamma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$, при этом $\frac{1+\gamma'(x)}{1-\gamma'(x)}=\alpha'(\eta)>1$, $0<\eta<1$, а также $\eta_0>0:\alpha(\eta_0)=1$.

Пусть в случае задачи (4), (5) выполняется условие

$$\Delta_1(\eta)=\exp\int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}p_1(\xi_1,\eta)d\xi-\alpha'(\eta)\alpha'(\alpha(\eta))\exp\int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}p_2(\eta,\xi_1)d\xi_1\ne 0,\ \xi_0\le\xi\le 1, \quad (7)$$

$$p_1(\xi_1,\eta)=\begin{cases}-\bar{b}(\xi_1,\alpha(\eta)),\alpha(\alpha(\eta))\le\xi_1\le\alpha(\eta),\\ -\bar{b}(\xi_1,\eta),\alpha(\eta)\le\xi\le\eta_1,\end{cases}$$

$$p_2(\eta,\xi_1)=\begin{cases}\bar{a}(\alpha(\alpha(\eta)),\xi_1),\alpha(\alpha(\eta))\le\xi_1\le\alpha(\eta),\\ \bar{a}(\alpha(\eta),\xi_1),\alpha(\eta)\le\xi_1\le\eta,\end{cases}$$

а в случае задачи (4), (6) имеет место

$$\Delta_2(\eta)=\exp\int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}p_1(\xi_1,\eta)d\xi_1-\exp\int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}p_2(\eta,\xi_1)d\xi_1\ne 0. \quad (8)$$

Тогда справедлива

Теорема Задача 1 имеет единственное решение.

п. 2. Доказательство теоремы. Сначала рассмотрим задачи (1), (2), которые переходят к задаче (4), (5). Используя общее решение уравнения (4) [2] в [3], показано, что решение задачи Коши для уравнения (4) представимо в виде

$$u(\xi,\eta)=\frac{\tau(\eta)}{2}R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{\tau(\xi)}{2}R(\xi,\xi;\xi,\eta)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\eta}^{\xi}\{\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-$$

$$-\tau(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}+2\left[a(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial N}+b(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1}R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)\tau(\xi_1)\ \}d\xi_1, \quad (9)$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)$-функция Римана уравнения (4), $\frac{\partial}{\partial N}\Big|_{\xi_1=\eta_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)\Big|_{\xi_1=\eta_1}$.

Тогда из (9), при $\xi=1$ и $\xi=\alpha(\eta)$, с учетом (5), получим следующие интегральные уравнения первого рода.

$$f_1(\eta)=\int_{\eta}^{1}\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;1,\eta)d\xi_1,\ \eta_0\le\eta\le 1,$$

$$f_2(\eta)=\int_{\alpha(\eta)}^{\eta}\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\alpha(\eta),\eta)d\xi_1,\ 0\le\eta\le\eta_0,$$

где

$$\sqrt{2}\, f_1(\eta) = \psi_1(\eta) - \frac{\tau(\eta)}{2} R(\eta,\eta;1,\eta) - \frac{\tau(1)}{2} R(1,1;1,\eta) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\eta}^{1}\left\{\frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1,\eta_1;1,\eta)|_{\xi_1=\eta_1} - 2\left[\bar{a}(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial N} + \bar{b}(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial \eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1} R(\xi_1,\xi_1;1,\eta)\right\}\tau(\xi_1)d\xi_1,$$

$$\sqrt{2}\, f_2(\eta) = -\psi_2(\eta) + \frac{\tau(\eta)}{2} R(\eta,\eta;\alpha(\eta),\eta) + \frac{\tau(\alpha(\eta))}{2} R(\alpha(\eta),\alpha(\eta);\alpha(\eta),\eta) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\eta}^{\alpha(\eta)}\left\{\frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1,\eta_1;\alpha(\eta),\eta)|_{\xi_1=\eta_1} - 2\left[\bar{a}(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial N} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\bar{b}(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial \eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1} R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta)\right\}\tau(\xi_1)d\xi_1,$$

которые дифференцированием сводятся соответственно к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\nu(\eta) = \mu_1(\eta) + \int_{\eta}^{1} G_1(\eta,\xi_1)\nu(\xi_1)d\xi_1,\ \eta_0 \le \eta \le 1, \tag{10}$$

и функционально-интегральному уравнению

$$a_1(\eta)\nu(\eta) + b_1(\eta)\nu(\alpha(\eta)) = \mu_2(\eta),\ 0 \le \eta \le \eta_0, \tag{11}$$

$$\mu_1(\eta) = f_1'(\eta) \Big/ R(\eta,\eta;1,\eta),\ G_1(\eta,\xi_1) = \frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi_1,\xi_1;1,\eta) \Big/ R(\eta,\eta;1,\eta),$$

$$a_1(\eta) = R(\eta,\eta;\alpha(\eta),\eta), b_1(\eta) = -\alpha'(\eta)R(\alpha(\eta),\alpha(\eta);\alpha(\eta),\eta),$$

$$\mu_2(\eta) = \int_{\eta}^{\alpha(\eta)} \nu(\xi_1)\frac{\partial}{\partial \eta} R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta)d\eta_1 + f_2'(\eta), R(\eta,\eta;1,\eta) = \exp\int_{\eta}^{1} b(\xi_2,\eta)d\eta_2 .$$

В[4] показано, что если

$$\Delta_1(\eta) = a_1(\eta)a_1[\alpha(\eta)] - b_1(\eta)b_1[\alpha(\eta)] \ne 0, \tag{12}$$

то функциональное уравнение (11) имеет единственное решение вида

$$\nu(\eta) = \left[a_1(\alpha(\eta))\mu_2(\eta) - b_1(\eta)\mu_2(\alpha(\eta))\right] \Big/ \Delta_1 . \tag{13}$$

Из определения функция Римана *R*[2,5] формула (12) записывается в виде (7), а (13) следующим образом

$$\nu(\eta) = g(\eta) + \int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta} G(\eta,\xi_1)\nu(\eta_1)d\eta_1,\ 0 \le \eta \le \eta_0, \tag{14}$$

$$g(\eta) = \left[f_2'(\eta)\exp\int_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))} \bar{b}(\eta_1,\alpha(\eta))d\eta_1 + f_2'(\alpha(\eta))\exp\int_{\alpha(\eta)}^{\eta} \bar{a}(\alpha(\eta),\eta_1)d\eta_1\right] \Big/ \Delta_1,$$

$$G(\eta,\xi_1) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\Delta_1}\dfrac{\partial}{\partial \eta} R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\alpha(\eta)),\alpha(\eta))\exp\displaystyle\int_{\alpha(\eta)}^{\eta} \bar{a}(\alpha(\eta),\eta_1)d\eta_1, \alpha(\alpha(\eta)) \le \xi_1 \le \alpha(\eta), \\ -\dfrac{1}{\Delta_1}\dfrac{\partial}{\partial \eta} R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta)\exp\displaystyle\int_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))} \bar{b}(\eta_1,\alpha(\eta))d\eta_1, \alpha(\eta) \le \xi_1 \le \eta. \end{cases}$$

Известно, что функция Римана R по переменным ξ_1, η_1, и ξ, η имеет такую же гладкость, что и коэффициенты уравнения (4) [2, 5], поэтому ядро $G(\eta,\xi_1)$ допускает оценку

$$\left|G(\eta,\xi_1)\right| \le M_1 . \tag{15}$$

Решение интегрального уравнения (14) будем искать в виде ряда

$$\nu(\eta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \nu_\kappa(\eta), \tag{16}$$

$$\nu_0(\eta) = g(\eta),\ \ \nu_\kappa(\eta) = \int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta} G(\eta,\xi_1)\nu_{\kappa-1}(\xi_1)d\xi_1,\ \ \kappa = 1,2,\ldots .$$

Из (15) получим следующие оценки

$$\left|\nu_0(\eta)\right| = \max_{[0,\eta_0]}\left|g(\eta)\right| = m_1,\ \ \left|\nu_1(\eta)\right| \le m_1 M_1 \eta,\ \ \left|\nu_2(\eta)\right| \le m_1 M_1^2 \frac{\eta^2}{2},$$

и вообще
$$\left|\nu_\kappa(\eta)\right| \le m_1 \frac{(M_1\eta)^\kappa}{\kappa!} \le m_1 \frac{M_1^\kappa}{\kappa!}.$$

Тогда для ряда (16) будем иметь

$$\left|\nu(\eta)\right| \le \sum_{\kappa=0}^{\infty}\left|\nu_\kappa(\eta)\right| \le m_1 \sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{M_1^\kappa}{\kappa!} = m_1 \exp M_1 .$$

Таким образом, интегральное уравнение (14) [а также (11)], при выполнении условия (7), однозначно разрешима.

Следовательно, задача (4), (5) имеет единственное решение вида (9), в которой $\nu(\eta)$ находится из уравнений (10) и (14).

Теорема для задачи (1), (2) доказана.

Теперь ее докажем для задачи (1), (3). Для этого достаточно рассмотреть задачу (4), (6). Из решения задачи Коши (9) при $\xi = 1$ и $\xi = \alpha(\eta)$, с учетом (6), получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau(\eta) = \chi_1(\eta) + \int_{\eta}^{1} G_2(\eta,\xi_1)\tau(\xi_1)d\xi_1,\ \ \eta_0 \le \eta \le 1, \tag{17}$$

и функционально-интегральное уравнение

$$a_2(\eta)\tau(\eta) + b_2(\eta)\tau(\alpha(\eta)) = \chi_2(\eta),\ \ 0 \le \eta \le \eta_0, \tag{18}$$

где

$$\chi_1(\eta) = \left[2\psi_1(\eta) - \psi_1(1)R(1,1;1,\eta) - \sqrt{2}\int_{\eta}^{1}\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;1,\eta)d\xi_1\right] / R(\eta,\eta;1,\eta),$$

$$G_2(\eta,\xi_1) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} - \frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)R(\xi_1,\eta_1,1,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1} - 2\left(\overline{a}(\xi_1,\xi_1) - \overline{b}(\xi_1,\xi_1)\right)R(\xi_1,\xi_1;1,\eta)\right] / R(\eta,\eta;1,\eta),$$

$$a_2(\eta) = R(\eta,\eta;\alpha(\eta),\eta) = \exp\int_{\eta}^{\alpha(\eta)}\overline{b}(\xi_1,\eta)d\xi_1,$$

$$b_2(\eta) = R(\alpha(\eta),\alpha(\eta);\alpha(\eta),\eta) = \exp\int_{\alpha(\eta)}^{\eta}\overline{a}(\alpha(\eta),\eta_1)d\eta_1,$$

$$\chi_2(\eta) = f(\eta) + \int_{\eta}^{\alpha(\eta)}\tau(\xi_1)H(\eta_1,\xi_1)d\xi_1,\ \ f(\eta) = 2\psi_2(\eta) - \sqrt{2}\int_{\eta}^{\alpha(\eta)}\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta)d\xi_1,$$

$$H(\eta,\xi_1)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)R(\xi_1,\eta_1;\alpha(\eta),\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}-2\left(\overline{a}(\xi_1,\xi_1)-\overline{b}(\xi_1,\xi_1)\right)R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta).$$

Если выполняется условие

$$\Delta_2(\eta)=a_2(\eta)a_2[\alpha(\eta)]-b_2(\eta)b_2[\alpha(\eta)]\neq 0,$$

или то же самое условие (8), то функциональное уравнение (18) имеет единственное решение вида

$$\tau(\xi)=\psi(\eta)+\int\limits_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}G(\eta,\xi_1)\tau(\xi_1)d\xi_1,\ 0\le\eta\le\eta_0, \tag{19}$$

$$\psi(\eta)=\left[f(\eta)\exp\int\limits_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))}\overline{b}(\eta_1,\alpha(\eta))d\eta_1-f(\alpha(\eta))\exp\int\limits_{\alpha(\eta)}^{\eta}\overline{a}(\alpha(\eta),\eta_1)d\eta_1\right]\Big/\Delta_2,$$

$$G(\eta,\xi_1)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta_2}H(\alpha(\eta),\xi_1)\exp\displaystyle\int\limits_{\alpha(\eta)}^{\eta}\overline{a}(\alpha(\eta),\eta_1)d\eta_1,\alpha(\alpha(\eta))\le\xi_1\le\alpha(\eta),\\ -\dfrac{1}{\Delta_2}H(\eta,\xi_1)\exp\displaystyle\int\limits_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))}\overline{b}(\eta_1,\alpha(\eta))d\eta_1,\alpha(\eta)\le\xi_1\le\eta,\end{cases}$$

при этом $\max\limits_{[0,\eta_0]}|\psi(\eta)|=m_2$, $|G(\eta,\xi_1)|\le M_2$.

Решение интегрального уравнения (19) будем искать в виде ряда $\tau(\eta)=\sum\limits_{\kappa=0}^{\infty}\tau_\kappa(\eta)$, для которого имеет место неравенство $|\tau(\eta)|\le m_2\exp M_2\eta_0$.

Таким образом, интегральное уравнение (19) (а также (18)), при выполнении условия (8) однозначно разрешимо.

Следовательно, задача (4), (6) имеет единственное решение вида (9), в которой $\tau(\eta)$ определяются из (17) и (19).

Отметим, что если $A(x,y)=B(x,y)\equiv 0$, то условие (8) не выполняется. В этом случае уравнение (18) имеет вид

$$\tau(\eta)+\tau(\alpha(\eta))=f(\eta)+\int\limits_{\eta}^{\alpha(\eta)}\tau(\xi_1)H(\eta,\xi_1)d\xi_1, \tag{20}$$

$$H(\eta,\xi_1)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)R(\xi_1,\eta_1;\alpha(\eta),\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}.$$

Так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (20), вполне непрерывен то, как показано в [4], функциональное уравнение (20) имеет единственное решение.

Таким образом, и в этом случае задача (4) (6) однозначно разрешима.

Теорема для задачи (1), (3) доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1 Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973. – С. 701.

2 Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 164.

3 Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Ғылым, 1994. – С. 170.

4 Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – С. 448.

5 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 301.

REFERENCES

1 Frankl' F.I. Izbrannye trudy po gazovoj dinamike. M.: Nauka, 1973. S. 701.
2 Bicadze A.V. Uravnenija smeshannogo tipa. M.: Izd-vo AN SSSR, 1959. S. 164.
3 Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlja mnogomernyh giperbolicheskih i smeshannyh uravnenij. Almaty: Fylym, 1994. C. 170.
4 Litvinchuk G.S. Kraevye zadachi i singuljarnye integral'nye uravnenija so sdvigom. M.: Nauka, 1977. S. 448.
5 Nahushev A.M. Uravnenija matematicheskoj biologii. M.: Vysshaja shkola, 1995. S. 301.

Резюме

С. А. Алдашев

(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ЕКІНШІ ДӘРЕЖЕЛІ СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ ЖАЗЫҚТЫҚТА СИПАТТАМАДАН АУЫТҚЫҒАН ТҮЙІНДЕС ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП

Жұмыста екінші дәрежелі сызықтық дифференциалдық теңдеулерге жазықтықта сипаттамадан ауытқыған түйіндес шекаралық есептің бір мәнді шешімділігі дәлелденген.
Тірек сөздер: есеп, гиперболалық теңдеу, сипаттама, қисындылық.

Summary

S. A. Aldashev

(Kazakh national pedagogical university named after Abai, Almaty, Republic of Kazakhstan)

ADJOINT WELL-POSEDNESS OF A BOUNDARY-VALUE WITH DEPARTURE FROM THE CHARACTERISTIC FOR LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS OF SECOND ORDER ON A PLANE

This paper shows the adjoint well-posedness of the problems with departure from characteristic for second-order linear hyperbolic equations on a plane.
Keywords: problem, hyperbolic equation, characteristic, well-posedness.

Поступила 15.01.2014г.