УДК 517.95

С.А. АЛДАШЕВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

В работе для линейных гиперболических уравнений второго порядка доказана однозначная разрешимость обратной задачи нахождения ее решения $u(x,y)$ и правой части $f(x)$ или $f(x+y)$.

Пусть $D \subset R^2$ - конечная область, ограниченная отрезком $AB: 0 \le x \le 1$ оси $y=0$, а при $y>0$ прямыми $AC: x=y$ и $BC: y=1-x$.

Обратная задача. Найти функции $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ и $F(x,y)$, связанные в области D уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = F(x,y) \quad (1)$$

при выполнении для функций $u(x,y)$ условий

$$u|_{AB} = \tau(x), \quad (2)$$

$$u_y|_{AB} = \nu(x), \quad (3)$$

$$u|_{\Gamma} = \sigma(x), \quad (4)$$

где $A, B \in C^3(\overline{D})$, $C \in C(D)$, а Γ – прямая $y = \beta x > 0$, $0 < \beta = const < 1$.

В рассматриваемой обратной задаче условия (2) и (3) – условия задачи Коши, условия переопределения, необходимый для нахождения неизвестной функций $F(x,y)$.

Если ,

$\nu(x) \in C^1(I) \cap C(\overline{I})$,

$\sigma(x) \in C^2(I_\beta) \cap C(\overline{I_\beta})$,

$I = \{x : 0 < x < 1\}$,

$I_\beta = \{x : 0 < x < 1/(1+\beta)\}$, то имеет место

Теорема 1. Пусть $F(x,y) = F(x) \in C^1(\overline{I})$. Тогда функций $u = (x,y)$ и $F(x)$ находятся однозначно .

Теорема 2. Пусть

$F(x,y) = F(x+y) \in C(\overline{D})$. Тогда функций $u(x,y)$ и $F(x,y)$ определяются единственным образом .

Доказательство теоремы 1. В этом случае $F(x,y) = F(x)$. В характеристических координатах $\xi = x+y, \eta = x-y$ уравнение (1) в области $\Delta = \{(\xi,\eta) : o < \eta < \xi < 1\}$ записывается следующим образом

$$u_{\xi\eta} + au_\xi + bu_\eta + cu = f(\xi+\eta), \quad (5)$$

$$4a(\xi,\eta) = A + B, \; 4b(\xi,\eta) = A - B,$$

$$4c(\xi,\eta) = C, \; f(\xi+\eta) = F\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right).$$

При этом условия (2)- (4) соответственно имеют вид

$$u(\xi,\xi) = \tau(\xi),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\Big|_{\xi=\eta} = \nu(\xi) \quad (6)$$

$$u(\xi, \alpha\xi) = \varphi(\xi), \quad (7)$$

где $\varphi(\xi) = \sigma((1+\alpha)\xi), 0 < \alpha = \frac{1-\beta}{1+\beta} < 1$.

Далее, используя общее решение уравнения (5) ([1,2]), в [3] показано, что решение задачи Коши для уравнения (5) представимо в виде

$$u(\xi,\eta) = \frac{\tau(\eta)}{2} R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{\tau(\xi)}{2} R(\xi,\xi;\xi,\eta) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\eta^\xi \Big\{ \nu(\xi_1) R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1} +$$

$$+ 2\left[a(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial N} + b(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial \eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1} R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)\tau(\xi_1)\Big\} d\xi_1 +$$

$$+ \int_1^\xi \int_0^\eta f(\xi_1+\eta_1) R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) d\xi_1 d\eta_1, \quad (8)$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)$ - функция Римана уравнения (5),

а $\left.\frac{\partial}{\partial N}\right|_{\xi_1=\eta_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)\Big|_{\xi_1=\eta_1}$.

Тогда из (8) при $\eta=\alpha\xi$, с учетом условий (6), (7) получим

$$\psi(\xi)=\int_1^{\xi}\int_0^{\alpha\xi}f(\xi_1+\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha\xi)d\xi_1d\eta_1\ ,\quad 0\le\xi\le1\ ,$$

$$\psi(\xi)=\varphi(\xi)-\frac{\tau(\alpha\xi)}{2}R(\alpha\xi,\alpha\xi;\xi,\alpha\xi)-\frac{\tau(\xi)}{2}R(\xi,\xi;\xi,\alpha\xi)-$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\alpha\xi}^{\xi}\left\{\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\alpha\xi)-\tau(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha\xi)\Big|_{\xi_1=\eta_1}+\right.$$

$$\left.+2\left[a(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial N}+b(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1}R(\xi_1,\xi_1;\xi,\alpha\xi)\tau(\xi_1)\right\}d\xi_1,$$

которое после двукратного дифференцирования сводится к следующему нагруженному ([4]) интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\frac{\psi''(\xi)}{2\alpha}=f((\alpha+1)\xi)+\frac{1}{2\alpha}\int_0^{\alpha\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}[f(\xi_1+\xi)R(\xi_1,\xi;\xi,\alpha\xi)]d\xi_1+$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_0^{\alpha\xi}f(\xi_1+\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha\xi)\Big|_{\eta_1=\xi}d\xi_1+$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}[f(\alpha\xi+\eta_1)R(\alpha\xi,\eta_1;\xi,\alpha\xi)]d\eta_1+$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^{\xi}f(\alpha\xi+\eta_1)\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha\xi)\Big|_{\xi_1=\alpha\xi}d\eta_1+$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_1^{\xi}\int_0^{\alpha\xi}f(\xi_1+\eta_1)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha\xi)d\xi_1d\eta_1. \tag{9}$$

Уравнение (9) удобно записать в виде

$$f(\xi)=L(f)\ . \tag{10}$$

Известно, что если $a,b\in C^3(\overline{\Delta})$, то $R\in C^3(\overline{\Delta})$ (см. например [1]).Поэтому интеграл оператор L осуществляет отображение полного метрического пространства $C^1(\overline{I})$ с нормой $\|f\|=\max\limits_{\overline{I}}|f(\xi)|+\max\limits_{\overline{I}}|f'(\xi)|$ в себя.

Пусть f_1 и f_2 – произвольные элементы пространства $C^1(\overline{I})$.

Легко видеть, что для $f=f_1-f_2$ справедлива оценка

$$|L(f)|=\Bigg|-\frac{1}{2\alpha}\int_0^{\alpha\xi}\Big[f'(\xi_1+\xi)R(\xi_1,\xi;\xi,\alpha\xi)+$$

$$+f(\xi_1+\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi_1,\xi;\xi,\alpha\xi)\Big]d\xi_1-$$

$$-\frac{1}{2\alpha}\int_0^{\alpha\xi}f(\xi_1+\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha\xi)\Big|_{\eta_1=\xi}d\xi_1+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\xi}^{1}\Big[\alpha f'(\alpha\xi+\eta_1)R(\alpha\xi,\eta_1;\xi,\alpha\xi)+$$

$$+f(\alpha\xi+\eta_1)\frac{\partial}{\partial\xi}R(\alpha\xi,\eta_1;\xi,\alpha\xi)\Big]d\eta_1+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\xi}^{1}f(\alpha\xi+\eta_1)\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha\xi)\Big|_{\xi=\alpha\xi}d\eta_1+$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_{\xi}^{1}\int_0^{\alpha\xi}f(\xi_1+\eta_1)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha\xi)d\xi_1d\eta_1\Bigg|\le$$

$$\le2M\|f\|[\xi+(1-\xi)+\xi(1-\xi)],$$

$$M=\max\left(\max_{\overline{\Delta}}|R|,\max_{\overline{\Delta}}\left|\frac{\partial R}{\partial\xi}\right|,\max_{\overline{\Delta}}\left|\frac{\partial^2R}{\partial\xi^2}\right|\right).$$

Далее , ясно, что

$$|L^2(f)|\le(2M)^2\|f\|\left[\xi^2+(1-\xi)^2+\frac{\xi^2}{2}\cdot\frac{(1-\xi)^2}{2}\right].$$

Продолжая этот процесс, получим

$$|L^n(f)|\le(2M)^n\|f\|\left[\frac{\xi^n}{n!}+\frac{(1-\xi)^n}{n!}+\frac{\xi^n}{n!}\cdot\frac{(1-\xi)^n}{n!}\right],$$

где $L^n-n-я$ степень оператора L. Отсюда видно, что можно подобрать такое n, что

$$|L^n(f)|\le C\cdot\|f\|, C=const<1. \tag{11}$$

Неравенство (11) означает, что оператор L^n является сжимающим.

Следовательно, оператор L([5]) имеет единственную неподвижную точку. Эта неподвижная точка и есть решение уравнения (10) т.е. (9). Найденное $f(\xi)$ подставив в (9) однозначно найдем $u(\xi,\eta)$.

Теорема 1 доказана.

Теперь переходим к доказательству теоремы 2. Пусть $F(x,y)=F(x+y)$. В этом случае уравнение (1) в характеристических координатах запишется в виде

$$u_{\xi\eta}+au_{\xi}+bu_{\eta}+cu=f(\xi), 0\le\xi\le1. \tag{12}$$

Тогда из (8) при $\eta = \alpha\xi$, с учетом условий (6), (7) получим уравнение

$$\psi(\xi) = \int_0^{\alpha\xi} G(\xi,\xi_1) f(\xi_1) d\xi_1, \qquad (13)$$

$$G(\xi,\xi_1) = \int_1^{\xi} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha\xi) d\xi_1.$$

т.к. $G(\xi,\alpha\xi) \neq 0$, то из (13) после дифференцирования приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$f(\alpha\xi) = \frac{\psi'(\xi)}{\alpha G(\xi,\alpha\xi)} - \frac{1}{\alpha G(\xi,\alpha\xi)} \int_0^{\alpha\xi} f(\xi_1) \frac{\partial}{\partial\xi} G(\xi,\xi_1) d\xi_1.$$

Таким образом, теорема 2 также доказано.

Замечание 1. Приведенные теоремы остаются верными, если неизвестная функция $F(x,y) = F(y)$ или $F(x,y) = F(x-y)$.

Замечание 2. Если условия Коши (2) и (3) заменить на условия задач Дарбу, то однозначные разрешимости соответствующих обратных задач доказываются аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа, М.: Изд-во АН СССР, 1959-164 с.

2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных, М.: Наука, 1981-448 с.

3. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений, Алматы: Гылым, 1994-170 с.

4. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии, М.: Наука, 1995-301 с.

5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ, М.: Наука, 1977-741 с.

Резюме

Мақалада жазықтықта екінші дәрежелі сызықтық гиперболалық теңдеулерге кері есептің шешімі мен оң жағының бар және жалғыздығы дәлелденген.

Западно-Казахстанский аграрно-технический университет им. Жангир хана
г. Уральск

Поступила 15.03.2008