С. А. АЛДАШЕВ

(Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Республика Казахстан)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

В работе доказаны однозначные разрешимости краевых задач для многомерных гиперболических урав-нений, которые являются обобщениями известных задач Коши, Дарбу и Гурса.

Ключевые слова: краевые задачи, многомерные, гиперболические уравнения.

Кілт сөздер: шеттік есептер, көп өлшемді, гиперболалық теңдеулер.

Keywords: regional tasks, the multivariate, hyperbolic equations.

Рассмотрим уравнение

$$g_1(t)\Delta_x u - g_2(t)u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

где $tg_i(t) > 0, i = 1,2$ при $t > 0$ и может обращаться в нуль при $t = 0$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$.

К уравнениям вида (1) принадлежат строго гиперболические, вырождающиеся гипербо-лические уравнения, а также уравнения, у которых одновременно вырождаются тип и порядок при $t = 0$, которые часто встречаются в задачах прикладного характера [1-3].

Пусть D_ε – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек (x,t), ограниченная поверх-ностями

$$r = \int_0^t \sqrt{g_1(\xi)/g_2(\xi)}\,d\xi + \varepsilon, r = 1 - \int_0^t \sqrt{g_1(\xi)/g_2(\xi)}\,d\xi$$

и плоскостью $t = 0$, где $r = |x|$ – длина вектора

$x=(x_1,\dots,x_m), 0\le t\le t_0, t_0: {}^{(1-\varepsilon)}/_2=\int_0^t\sqrt{g_1/g_2}\,d\xi$, $\sqrt{g_1/g_2}\in L(0,t_0)$, a $0<\varepsilon<1$. Часть этих поверхностей, образующих границу D_ε, соответственно обозначим $S_\varepsilon, S_1, S^\varepsilon$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m$, t к сферическим $r,\theta_1,\dots,\theta_{m-1},t, r\ge 0, 0\le\theta_1<2\pi, 0\le\theta_i\le\pi, i=2,3,\dots,m-1$.

ЗАДАЧА 1. Найти регулярное в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C(\bar{D}_\varepsilon)\cap C^1(D_\varepsilon\cup S^\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$(\alpha_1(r)u+\beta_1(r)u_t)\big|_{S^\varepsilon}=\varphi(r,\theta),\ u\big|_{S_\varepsilon}=\sigma_\varepsilon(r,\theta) \tag{2}$$

или

$$(\alpha_1(r)u+\beta_1(r)u_t)\big|_{S^\varepsilon}=\varphi(r,\theta),\ u\big|_{S_1}=\sigma_1(r,\theta). \tag{3}$$

ЗАДАЧА 2. Найти решение $u\in C(\bar{D}_\varepsilon)\cap C^1(D_\varepsilon\cup S^\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon)$ уравнения (1), удовлетворяю-щее условиям

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta),$$

$$\alpha_2(r)u\left(\frac{r+\varepsilon}{2},\theta,\frac{r-\varepsilon}{2}\right)=\beta_2(r)u_t(r,\theta,0)+\beta(r,\theta), \varepsilon\le r\le 1 .$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что уравнения $\alpha_i(r)=0$, $\beta_i(r)=0, i=1,2$ не имеют корней, кроме тождественно равных нулю, причем

$$\alpha_i^2(r)+\beta_i^2(r)\neq 0, i=1,2, \forall r\in[\varepsilon,1],\quad \theta=(\theta_1,\dots,\theta_{m-1}).$$

Задачи 1, 2 являются обобщениями задачи Коши, Дарбу для уравнения (1).

В качестве многомерного аналога задачи Гурса может быть рассмотрена следующая:

ЗАДАЧА 3. Найти регулярное в области D_ε решение уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}_\varepsilon$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{S_\varepsilon}=\sigma_\varepsilon(r,\theta),\ u\big|_{S_1}=\sigma_1(r,\theta).$$

Сформулированные задачи в частных случаях исследованы в [4-6].

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно зависимых сферических функций порядка $n, 1\le k\le k_n, k_n(m-2)!\,n!=(n+m-2)!\,(2n+m-2)$; $W_2^l(S), l=0,1,\dots$ – пространства Со-болева, а $\tilde{S}^\varepsilon=\left\{(r,\theta)\in S^\varepsilon, \varepsilon<r<{}^{(1+\varepsilon)}/_2\right\}$. Имеет место ([7]).

ЛЕММА 1. Если $f(r,\theta)\in W_2^l(S^\varepsilon)$ и $l>m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta) \tag{4}$$

сходится абсолютно и равномерно.

Через $\varphi_n^k(r), \sigma_{\varepsilon n}^k(r), \tilde{a}_{in}^k(r,t), \tilde{a}_{in}^k(r,t), \tilde{b}_n^k(r,t), \tilde{c}_n^k(r,t), \rho_n^k, \tilde{f}_n^k$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций

$$\varphi(r,\theta), \sigma_\varepsilon(r,\theta), a_i\rho(\theta), a_i f(\theta)\rho(\theta), b\rho(\theta), c\rho(\theta), \rho(\theta), f(\theta)\rho(\theta)$$

которые определяются по формуле

$$\varphi_n^k(r) = \int_{\Gamma_1} \varphi(r,\theta) Y_{n,m}^k(\theta) d\Gamma_1,$$

$$\tilde{g}_{jn}^k(t) = g_j(t)\rho_n^k, j = 1,2 ,$$

причем

$$\rho(\theta) \in C^\infty(S^\varepsilon), \rho(\theta) \neq 0, f(\theta) = r_{x_i} = \frac{x_i}{r} \in C^\infty(S^\varepsilon),$$

Γ_1 – единичная сфера в $E_m, i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим множество функций

$$M_0^l(S^\varepsilon) = \left\{ \left(\left(f(r,\theta): f \in W_2^l(S^\varepsilon), \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_n} (\left\| f_n^k(r) \right\|_{C^2((\varepsilon,1))}^2 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\| f_n^k(r) \right\|_{C([\varepsilon,1])}^2 \right) exp 2n^3 < \infty, l > m-1 \right\},$$

$$M^l\ (S^\varepsilon) = \left\{ \left(\left(f(r,\theta): f \in W_2^l(S^\varepsilon), \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_n} (\left\| f_n^k(r) \right\|_{C^2((\varepsilon,1))}^2 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\| f_n^k(r) \right\|_{C([\varepsilon,1])}^2 \right) (exp 2 exp n^3) exp n^3 < \infty, l > m-1 \right\}.$$

Пусть

$$a_i, b \in W_2^l(D_\varepsilon) \bigcap C^1(\bar{D}_\varepsilon), l \geq m+1, \left({}^{a_i}/_{g}\right)_t, \left({}^{b}/_{\sqrt{g_1 g_2}}\right)_t \in C(\bar{D}_\varepsilon) \bigcap C^1(D_\varepsilon),$$

$$i = 1, \dots, m, c \in W_2^l(D_\varepsilon), l \geq m+1, \left({}^{c}/_{g_1}\right)_t \in C(D_\varepsilon),$$

(*)

$$\left({}^{g_1}/_{g_2}\right)^{1/2} \in C^2\left([0,t_0]\right) \bigcap C^3\left((0,t_0)\right), \alpha_1(r), \beta_1(r) \in C([\varepsilon,1]) \bigcap C^2((\varepsilon,1)),$$

тогда справедлива

ТЕОРЕМА 1. 1^0. Если $\varphi(r,\theta) \in M^l(S^\varepsilon), \sigma_\varepsilon(r,\theta) \in M^l(S^\varepsilon),$

$\sigma_1(r,\theta) \in M^l\left(S^\varepsilon \middle| \tilde{S}^\varepsilon\right)$, то задача 1 однозначно разрешима;

2^0. Если $\varphi(r,\theta) \in M^l(S^\varepsilon), \sigma_\varepsilon(r,\theta) \in M^l(S^\varepsilon),$

$\sigma_1(r,\theta) \in M^l\left(S^\varepsilon \middle| \tilde{S}^\varepsilon\right)$, то задача 3 является корректной.

ТЕОРЕМА 2. Если $\tau(r,\theta), \beta(r,\theta) \in M^l(S^\varepsilon), \alpha_2(r),$

$\beta_2(r) \in C([\varepsilon,1]) \bigcap C^1((\varepsilon,1))$,

то задача 2 имеет единственное решение.

Доказательство теоремы 1.

Сначала рассмотрим задачу (1), (2) при $\beta_1(r) \neq 0, \forall r \in [\varepsilon,1]$. В сферических координатах $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$ уравнение (1) имеет вид

$$g_1(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\partial u\right) - g_2(t)u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} +$$

$$+b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0 \ , \tag{5}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{P_j \sin^{m-j-1}} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\frac{\sin^{m-j-1}\theta_j\,\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$P_1 = 1, P_j = \left(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{j-1}\right)^2, j > 1.$$

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\bar{D}_\varepsilon) \bigcap C^1\left(D_\varepsilon \bigcup S^\varepsilon\right) \bigcap C^2(D_\varepsilon)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{k_n} v_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $v_n^k(r,t)$ – функции подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), полученное выражение сначала умножив на $\rho(\theta)$, а затем проинтегрировав по единичной сфере Γ_1, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left[\rho_n^k\left(g_1\left(v_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}v_{nr}^k-\frac{\lambda}{r^2}v_n^k\right)-g_2v_{ntt}^k\right)+\sum_{i=1}^{m}\int_{\Gamma_1}a_i\rho(\theta)\times\right.$$
$$\left.\times\left(v_{nx_i}^kY_{n,m}^k(\theta)+v_n^k\frac{\partial}{\partial x_i}Y_{n,m}^k(\theta)\right)d\Gamma_1+\tilde{b}_n^kv_{nt}^k+\tilde{c}_n^kv_n^k\right]=0,\lambda=n(n+m-2) \qquad (7)$$

Известно, что [7, 8]

$$Y_{0,m}^1(\theta)=const,\frac{\partial}{\partial x_i}Y_{n,m}^k(\theta)=\frac{\partial Q_n^k}{\partial x_i}\Big|_{r=1}-nr_{x_i}Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (8)$$

здесь $Q_n^k(x)=r^nY_{n,m}^k(\theta)$ – гармоническая функция от x, причем $\frac{\partial Q_n^k}{\partial x_i}\Big|_{r=1}$ – есть m-мерная сферическая функция $Y_{n-1,m}^k(\theta)$ порядка $n-1$.

Учитывая (8) уравнение (7) можем записать в виде

$$\begin{cases}\tilde{g}_{10}^1v_{0rr}^1-\{\tilde{g}_{20}^1v_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}\tilde{g}_{10}^1+\sum_{i=1}^m\hat{a}_{i0}^1\right)v_{0r}^1+\tilde{b}_0^1v_{0t}^1+\tilde{c}_0^1v_0^1=0\\ \tilde{g}_{1n}^kv_{nrr}^k-\{\tilde{g}_{2n}^kv_{ntt}^k+\left(\frac{m-1}{r}\tilde{g}_{1n}^k+\sum_{i=1}^m\hat{a}_{in}^k\right)v_{nr}^1+\tilde{b}_n^kv_{nt}^k+\\ +\left[\tilde{c}_n^k-\frac{\lambda}{r^2}\tilde{g}_{1n}^k+\sum_{i=1}^m(\hat{a}_{i,n-1}^k-n\hat{a}_{in}^k)\right]v_n^k=0,k=\overline{2,k_n},n=1,2,\ldots\end{cases} \qquad (9)$$

Таким образом, многомерное уравнение (1) сведено к двумерным уравнениям.

Каждое уравнение системы (9) можно записать в виде

$$\tilde{g}_{1n}^kv_{nrr}^k-\tilde{g}_{2n}^kv_{ntt}^k+a_n^kv_{nr}^k+\tilde{b}_n^kv_{nt}^k+c_n^kv_n^k=0,k=\overline{1,k_n},n=0,1,\ldots, \qquad (10)$$

где

$$a_n^k=\begin{cases}\frac{m-1}{r}\tilde{g}_{10}^1+\sum_{i=1}^m\hat{a}_{i0}^1,k=1,n=0\\ \frac{m-1}{r}\tilde{g}_{in}^k+\sum_{i=1}^m\hat{a}_{in}^k,k=\overline{2,k_n},n=1,2,\ldots,\end{cases}$$

$$c_n^k=\begin{cases}\tilde{c}_0^1,k=1,n=0\\ \tilde{c}_n^k-\frac{\lambda}{r^2}\tilde{g}_{1n}^k+\sum_{i=1}^m\hat{a}_{i,n-1}^k-n\hat{a}_{in}^k,k=\overline{2,k_n},n=1,2,\ldots.\end{cases}$$

В уравнении (10), произведя замену переменных

$$\xi=\frac{1}{2}\left(r+\int_0^t\sqrt{g_{1n}^k/g_{2n}^k}\,d\mu\right),\eta=\frac{1}{2}\left(r-\int_0^t\sqrt{g_{1n}^k/g_{2n}^k}\,d\mu\right),$$

получим

$$v_{n\xi\eta}^k+\bar{a}_n^k(\xi,\eta)v_{n\xi}^k+\bar{b}_n^k(\xi,\eta)v_{n\eta}^k+\bar{c}_n^k(\xi,\eta)v_n^k=0\ , \qquad (11)$$

где

$$\bar{a}_n^k(\xi,\eta)=\frac{a_n^k(r,t)}{2\sqrt{\tilde{g}_{1n}^k\tilde{g}_{2n}^k}}-\left(\sqrt{\frac{\tilde{g}_{1n(t)}^k}{\tilde{g}_{2n}^k(t)}}\right)\Bigg|_t,$$

$$\bar{b}_n^k(\xi,\eta)=\frac{a_n^k(r,t)}{2\tilde{g}_{1n}^k}-\frac{\tilde{b}_n^k(r,t)}{2\sqrt{\tilde{g}_{1n}^k\tilde{g}_{2n}^k}}+\left(\sqrt{\frac{\tilde{g}_{1n(t)}^k}{\tilde{g}_{2n}^k(t)}}\right)\Bigg|_t,\ \bar{c}_n^k(\xi,\eta)=\frac{c_n^k(r,t)}{\tilde{g}_{1n}^k}.$$

при этом условие (2) для функций $v_n^k(\xi,\eta)$, с учетом леммы 1, перепишется в виде

$$a_0(\xi)\tau_n^k(\xi)+b_0(\xi)\nu_n^k(\xi)=\bar{\varphi}_n^k(\xi),\ v_n^k\left(\xi,\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi), \tag{12}$$

$$a_0(\xi)=\alpha_1(2\xi),\ \tau_n^k(\xi)=v_n^k(\xi,\xi),\ b_0(\xi)=\sqrt{2}\beta_1(2\xi),\ \nu_n^k(\xi)=\frac{\partial v_n^k}{\partial N}\Big|_{\xi=\eta}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial v_n^k}{\partial\xi}-\frac{\partial v_n^k}{\partial\eta}\right)\Bigg|_{\xi=\eta},\ \bar{\varphi}_n^k(\xi)=(2\xi)^{(m-1)/2}\bar{\varphi}_n^k(2\xi),\ \varphi_{\varepsilon n}^k(\xi)=$$

$$=\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{(m-1)/2}\bar{\sigma}_{\varepsilon n}^k\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right),\ \frac{\varepsilon}{2}\le\xi\le\frac{1}{2}.$$

Используя общее решение уравнения (11) ([9]), нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (11) имеет вид

$$v_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R_n(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R_n(\xi,\xi;\xi,\eta)+ \tag{13}$$

$$+2\left[\bar{a}_n^k(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial N}+\bar{b}_n^k(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\Bigg|_{\xi_1=\eta_1}R_n(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)\tau_n^k(\xi_1)\Bigg\}d\xi_1,$$

где $R_n(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta),n=0,1,\ldots$ – функция Римана уравнения (11), существование которой доказано в [9].

Из уравнения (13) при $\eta=\frac{\varepsilon}{2}$ с учетом условия (12) получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$q_n^k(\xi)=\tau_n^k(\xi)+\int_{\varepsilon/2}^{\xi}\mathbf{G_n}(\xi,\xi_1)\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1, \tag{14}$$

где

$$R_n\left(\xi,\xi;\xi,\frac{\varepsilon}{2}\right)q_n^k(\xi)=2\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi)-\varphi_{\varepsilon n}^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)R_n\left(\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2};\xi,\frac{\varepsilon}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\frac{\widehat{\varphi}_n^k(\xi_1)}{b_0(\xi_1)}R_n\left(\xi_1,\xi_1;\xi,\frac{\varepsilon}{2}\right)d\xi_1,\ R_n\left(\xi,\xi;\xi,\frac{\varepsilon}{2}\right)G_n(\xi,\xi_1)=$$

$$=\sqrt{2}\left\{-\frac{a_0(\xi_1)}{b_0(\xi_1)}R_n\left(\xi_1,\xi_1;\xi,\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial N}R_n(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}+\right.$$

$$\left.+2\left[\bar{a}_n^k(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial N}+\bar{b}_n^k(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1}R_n\left(\xi_1,\xi_1;\xi,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}.$$

Учитывая определение функции Римана и $R_n\left(\xi,\xi;\xi,\frac{\varepsilon}{2}\right)>0$ из уравнения (14) найдем единст-венным образом

$$\tau_n^k(\xi)=q_n^k(\xi)-\int_{\varepsilon/2}^{\xi}R_n(\xi,\xi_1;-1)q_n^k(\xi_1)d\xi_1, \tag{15}$$

где $R_n(\xi,\xi_1;-1)$ – резольвента ядра $G_n(\xi,\xi_1), n=0,1,\ldots$.

Таким образом, решение задачи (11), (12) запишется в виде (13), где $\tau_n^k(\xi),\nu_n^k(\xi)$ определяются соответственно из формул (15), (12).

Следовательно, функция (6) является единственным решением задачи (1), (2), где $v_n^k(r,t), k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots$ находятся по формуле (13).

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1), а также на заданные функции $\alpha_1(r),\beta_1(r),\varphi(r,\theta),\sigma_\varepsilon(r,\theta)$, и тот факт, что функция Римана есть решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода, а также оценки [7]

$$k_n\leq cn^{m-2},\ \left|Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq cn^{\frac{m}{2}-1},\ c=const>0$$

можно доказать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ в виде (6) принадлежит классу $C(\bar{D}_\varepsilon)\bigcap C^1\left(D_\varepsilon\bigcup S^\varepsilon\right)\bigcap C^2(D_\varepsilon)$.

Таким образом, задача (1), (2) имеет единственное решение.

Однозначные разрешимости задачи (1), (2) при $\beta_1(r)\equiv 0$, а также задач 2, 3 устанавливаются аналогично.

Отметим, что в теоремах 1, 2 принадлежность заданных функций к классу $M(S)$ являются су-щественными и их нарушения могут привести к некорректности решения рассматриваемых задач (см.примеры в [5]).

Мы теперь рассмотрим уравнение (1) в тех случаях, когда ее коэффициенты не удовлетворяют условию (*). К таким уравнениям, например, относятся уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона (Э-Д-П)

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{k}{t} u_t = 0, k = const \ , \tag{16}$$

а также обобщенное уравнение Э-Д-П

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{k(t)}{t^2} u_t = 0, \alpha = const > 0 \ ,$$

если $\frac{k(t)}{t^2} \notin C([0, t_0])$.

Краевые задачи для уравнения (16) исследованы в [5].

Рассмотрим уравнение

$$g_1(t)\Delta_x u - t^l u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(t) u_{x_i} + b(t) u_t + c(t) u = 0, \tag{17}$$

$l = const \geq 0$, относительно ее коэффициентов будем предполагать, что $g_1, a_i, c \in C([0, t_0]), i = 1, \dots, m, \left({}^{g_1}/_{t^l} \right)^{1/2} \in L(0, t_0), b(t) = p(t) - qt^l - -lt^{l-1}, q = const$,

$p(t)$ – положительная непрерывная функция в $\bar{D}_\varepsilon$, причем $qt^l - p(t) \geq 0$.

ЗАДАЧА 4. В области D_ε найти решение $u(x,t)$ уравнения (17) из класса $u \in C(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon) \cap W_2^1(D_\varepsilon) \cap W_2^1(\partial D_\varepsilon)$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon} = 0, u|_{S_1} = 0 \tag{18}$$

или

$$u_t|_{S^\varepsilon} = 0, u|_{S_1} = 0 \ . \tag{19}$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3. Если коэффициенты уравнения (16) удовлетворяют одному из следующих условий:

1) $g_1(0) \neq 0$ или $r \sum_{i=1}^{m} a_i(0) < (1 - m) g_1(0)$;

2) $\frac{t^l}{g_1}, \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{g_1}, \frac{c}{g_1}, \frac{p}{g_1} \in C\left(\bar{D}_\varepsilon\right)$;

3) $\frac{g_1}{q(r,t)}, \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{g_1}, \frac{c}{g_1}, \frac{t^l}{q(r,t)}, \frac{p}{q(r,t)} \in C\left(\bar{D}_\varepsilon\right), q(r,t) = r \sum_{i=1}^{m} a_i + (m-1) g_1$,

причем $q(r,t) < 0$ при $t \neq 0$, то решение задачи 4 единственно.

Доказательство. Решение задачи (17), (18) будем искать в виде ряда (6), тогда как в случае задачи 1, приходим к задаче Дарбу для уравнения

$$\rho_n^k g_1(t) v_{nrr}^k - \rho_n^k t^l v_{ntt}^k + a_n^k v_{nr}^k + b_n^k v_{nt}^k + c_n^k v_n^k = 0 \tag{20}$$

с граничным условием

$$v_n^k(r,0) = 0, \qquad v_n^k\left(1 - \int_0^t \sqrt{g_1/\xi_l}\, d\xi, t\right) = 0\ , \tag{21}$$

где

$$a_n^k(r,t) = \rho_n^k\left(\frac{m-1}{r}g_1(t) + \sum_{i=1}^m a_i\right), b_n^k(t) = \rho_n^k b(t), k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\dots,$$

$$C_n^k(r,t) = \begin{cases} \rho_0^1 c(t), k = 1, n = 0 \\ \rho_n^k\left(c - \frac{\lambda}{r^2}g_1\right) + \sum_{i=1}^m \left(\rho_{n-1}^k - n\tilde{f}_n^k\right)a_i, k = \overline{2,k_n}, n = 1,2,\dots . \end{cases}$$

При выполнении условия теоремы 3 из результатов работы [10] следует, что задача (20), (21) имеет только тривиальное решение.

Следовательно, решение (17), (18) $u(x,t) \equiv 0$.

Справедливость теоремы 3 для задачи (17), (19) доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

2 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математической модели. – М.: Наука, 1973. – 416 с.

3 Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

4 Алдашев С.А. // ДАН СССР. – Т. 265, № 6. – С. 1289-1292.

5 Алдашев С.А. // Zeitschrift fur Analysis und Anwen – dungen. – 1985. – Bd. 4(2). – S. 97-106.

6 Алдашев С.А. Тезисы Всесоюзной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Ашхабад, 1986.

7 Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

8 Calderon A.P. // Zygmund Q.-Amez .Y. Math. – 1957. – Vol. 79, № 4. – P. 901-921.

9 Бицадзе А.В. Уравнения смешного типа. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164 с.

10 Алдашев С.А. // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 6. – С. 985-991.

REFERENCES

1 Tihonov A.N., Samarskij A.A. Urovnenija matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1972. 735 s.

2 Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Problemy gidrodinamiki i ih matematicheskoj modeli. M.: Nauka, 1973. 416 s.

3 Bicadze A.V. Nekotorye klassy urovnenij v chastnyh projzvodnyh. M.: Nauka, 1981. 448 c.

4 Aldashev S.A. DAN SSSR, t. 265, № 6. C. 1289-1292.

5 Aldashev S.A. Zeitschrift fur Analysis und Anwen – dungen. 1985. Bd. 4(2). S. 97-106.

6 Aldashev S.A. Tezisy vsesojuznoj konferencii «Differencial'nye uravnenija i ih prilozhenija». Ashhabad, 1986.

7 Mihlin S.G. Mnogomernye singuljarnye integraly i integral'nye uravnenija. M.: Fizmatgiz, 1962. 254 s.

8 Calderon A.P. Zygmund Q.-Amez .Y. Math. 1957. Vol. 79, № 4. P. 901-921.

9 Bicadze A.V. Uravnenija smeshnogo tipa. M.: Izd. AN SSSR, 1959. 164 c.

10 Aldashev S.A. Differencial'nye uravnenija. 1983. T. 19, № 6. S. 985-991.

Резюме

С. А. Алдашев

(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

КӨПӨЛШЕМДІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ АРНАЛҒАН

ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

Мақалада көпөлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған шектік есептердің бір мәнді шешімі барлығы дәлелденген. Бұл есептер белгілі Коши, Дарбу және Гурс есептерінің жалпыланған түрлері.

Кілт сөздер: шеттік есептер, көп өлшемді, гиперболалық теңдеулер.

Summary

S. A. Aldashev

(Kazakh national pedagogical university named after Abai, Almaty, Republic of Kazakhstan)

REGIONAL TASKS

FOR THE MULTIVARIATE HYPERBOLIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

In work are proved unequivocal to resolvability of regional tasks for the multivariate hyperbolic equations which are generalizations of known tasks Koshi, Darbu and Gursa.

Keywords: regional tasks, the multivariate, hyperbolic equations.

Поступила 5.07.2013г.