УДК 517.956

С. А. АЛДАШЕВ

ЗАДАЧИ ДАРБУ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СОПРЯЖЕННЫЕ ИМ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлена академиком НАН РК Н. К. Блиевым)

Для гиперболических уравнений исследованы задачи Дарбу с отходом о характеристики и сопряженные им задачи на плоскости и в пространстве.

В [1], для уравнения колебания струны изучались задачи Дарбу с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение этих задач для гиперболических уравнений. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены в [2].

В теории уравнений в частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректно поставленных задач [1, 3]. С использованием изложенного в [4] метода, в данной работе для гиперболических уравнений исследованы задачи Дарбу с отходом от характеристики и сопряженные им задачи на плоскости и в пространстве.

П.1. Постановка задач и результаты на плоскости. Пусть $D\subset R^2$ - конечная область, ограниченная отрезком AB : $0\le x\le 1$ оси y=0, при $y>0$ - гладкой кривой AC: $y=\gamma(x)$, $0\le x\le l$, $\gamma(l)=1-l$, вдоль которой $0<\gamma'(x)<1$ и прямой BC: $y=1-x$.

В области D рассмотрим линейные гиперболические уравнения

$$u_{xx}-u_{yy}+A(x,y)u_x+B(x,y)u_y+C(x,y)u=0, \tag{1}$$

$$A,B\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D),\ \ C\in C(D).$$

В качестве задачи Дарбу с отходом от характеристики рассмотрим следующую

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C\ (\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\ \big|_{AB}=\tau(x),\quad u\big|_{AC}=\sigma(x) \tag{2}$$

или

$$u_t\ \big|_{AB}=\nu(x),\quad u\big|_{AC}=\sigma(x), \tag{3}$$

а также рассмотрим задачи Дирихле и Пуанкаре.

Задача 2. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\ \big|_{AB}=\tau(x),\ u\big|_{AC}=\sigma(x),\ u\big|_{BC}=\varphi(x) \tag{4}$$

или

$$u_t\ \big|_{AB}=\nu(x),\ u\big|_{AC}=\sigma(x),\ u\big|_{BC}=\varphi(x), \tag{5}$$

где $\tau(x),\nu(x)\in C^1(0\le x\le 1)\cap C^2(0<x<1)$,

$$\sigma(x)\in C^1(0\le x\le l)\cap C^2(0<x<l).$$

В характеристических координатах $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, уравнение (1) записывается следующим образом

$$u_{\xi\eta}+au_\xi+bu_\eta+cu=0, \tag{6}$$

$$4a(\xi,\eta)=A+B,\ \ 4b(\xi,\eta)=A-B,$$

$$4c(\xi,\eta)=C.$$

При этом краевые условия (2)-(5) соответственно имеют вид

$$u(\xi,\xi)=\tau(\xi),\ \ u(\xi,\alpha(\xi))=\varphi(\xi),$$

$$0\le\xi\le 1, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big|_{\xi=\eta}=\nu(\xi),$$

$$u(\xi,\alpha(\xi))=\varphi(\xi),\ \ 0\le\xi\le 1, \tag{8}$$

$$u(\eta,\eta)=\tau(\eta),\ 0\le\eta\le 1, u(\beta(\eta),\eta)=g(\eta),$$

$$0\le\eta\le\eta_0,\ \ u(1,\eta)=\psi(\eta),\ \ \eta_0\le\eta\le 1, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big|_{\xi=\eta}=\nu(\eta),$$

$$0\le\eta\le 1,\ \ u(\beta(\eta),\eta)=g(\eta),\ 0\le\eta\le\eta_0,$$

$$u(1,\eta)=\psi(\eta),\ \ \eta_0\le\eta\le 1, \tag{10}$$

где $\varphi(\xi)=\sigma\left(\frac{\xi}{2}+\frac{\alpha(\xi)}{2}\right)$, а функция $\eta=\alpha(\xi)$ является решением уравнения $\eta=\xi-2\gamma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$, при этом $\alpha'(\xi)=\frac{1-\gamma'(x)}{1+\gamma'(x)}$, $0<\alpha'(\xi)<1$, $0<\xi<1$; $g(\eta)=\sigma\left(\frac{\eta}{2}+\frac{\beta(\eta)}{2}\right)$, $\psi(\eta)=\varphi\left(\frac{1+\eta}{2}\right)$, а функция $\xi=\beta(\eta)$ является решением уравнения $\xi=\eta+2\gamma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$, при этом $\frac{1+\gamma'(x)}{1+\gamma'(x)}=\beta'(\eta)>1$, $0<\eta<\eta_0$, а также $\eta_0>0:\beta(\eta_0)=1$.

Пусть в случае задачи (6), (7) выполняются условия

$$\Delta_1(\xi)=\exp\int\limits_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi}p_1(\xi,\xi_1)d\xi_1-$$

$$-\alpha'(\xi)\alpha'(\alpha(\xi))\exp\int\limits_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi}p_2(\xi_1,\xi)d\xi_1\neq 0,$$

$$p_1(\xi,\xi_1)=\begin{cases}-a(\alpha(\xi),\xi_1), & \alpha(\alpha(\xi))\le\xi_1\le\alpha(\xi),\\ -a(\xi,\xi_1), & \alpha(\xi)\le\xi_1\le\xi,\end{cases}$$

$$p_2(\xi_1,\xi)=\begin{cases}b(\xi_1,\alpha(\alpha(\xi)), & \alpha(\alpha(\xi))\le\xi_1\le\alpha(\xi),\\ b(\xi_1,\alpha(\xi)), & \alpha(\xi)\le\xi_1\le\xi,\end{cases}$$

а в случае задачи (6),(8) имеет место

$$\Delta_2(\xi)=\exp\int\limits_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi}p_1(\xi,\xi_1)d\xi_1-$$

$$-\exp\int\limits_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi}p_2(\xi_1,\xi)d\xi_1\neq 0.$$

Пусть, далее, в случае задачи (6), (9) выполняется условие

$$\Delta_3(\xi)=\exp\int\limits_{\beta(\beta(\eta))}^{\eta}q_1(\xi_1,\eta)d\xi_1-$$

$$-\beta'(\eta)\beta'(\beta(\eta))\exp\int\limits_{\beta(\beta(\eta))}^{\eta}q_2(\eta,\xi_1)d\xi_1\neq 0,$$

$$q_1(\xi_1,\eta)=\begin{cases}-b(\xi_1,\beta(\eta)), & \beta(\beta(\eta))\le\xi_1\le\beta(\eta),\\ -b(\xi_1,\eta), & \beta(\eta)\le\xi_1\le\eta,\end{cases}$$

$$q_2(\eta,\xi_1)=\begin{cases}a(\beta(\beta(\eta)),\xi_1), & \beta(\beta(\eta))\le\xi_1\le\beta(\eta),\\ a(\beta(\eta),\xi_1), & \beta(\eta)\le\xi_1\le\eta,\end{cases}$$

а в случае задачи (6), (10) имеет место

$$\Delta_4(\eta)=\exp\int\limits_{\beta(\beta(\eta))}^{\eta}q_1(\xi_1,\eta)d\xi_1-$$

$$-\exp\int\limits_{\beta(\beta(\eta))}^{\eta}q_2(\eta,\xi_1)d\xi_1\neq 0.$$

Тогда справедлива

Теорема 1. Задачи 1 и 2 однозначно разрешимы.

Следует отметить, как доказано в [3], что для корректности задачи Дарбу достаточно требовать гладкости коэффициентов уравнения (1).

П.2. Постановка задач и результаты в пространстве. Пусть Ω – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная конусами $\beta|x|=t$, $|x|=1-t$ и плоскостью $t=0$, где $|x|$ – длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$, а $0<\beta=const<1$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega$ области Ω, обозначим через S_0, S^1 и S соответственно.

В области Ω рассмотрим взаимно – сопряженные линейные гиперболические уравнения

$$\Delta_x u-u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0, \tag{11}$$

$$\Delta_x\upsilon-\upsilon_{tt}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\upsilon)-\frac{\partial}{\partial t}(b\upsilon)+d\upsilon=0, \tag{11*}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m, m \geq 2$, $d(x,t) = c - \sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В качестве многомерного аналога задачи Дарбу с отходом от характеристики рассмотрим следующую

Задача 3. Найти в области Ω решение уравнения (11) из класса $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\,|_S = \tau(x),\ u|_{S_0} = \sigma(x),$$

или

$$u_t\,|_S = \nu(x),\ u|_{S_0} = \sigma(x),$$

а также рассмотрим сопряженную ей задачи Дирихле и Пуанкаре.

Задача 4. Найти в области Ω решение уравнения (11^*) из класса $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon|_S = \tau(x),\ \upsilon|_{S_0} = \sigma(x),\ \upsilon|_{S_1} = \varphi(x),$$

или

$$\upsilon_t\,|_S = \nu(x),\ \upsilon|_{S_0} = \sigma(x),\ u|_{S_1} = \varphi(x).$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi$, $i = 2,...,m-1$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$- система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1,...,\theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l = 0,1,...$ - пространства Соболева, а $\widetilde{S} = \{(r,\theta) \in S,\ 0 < r < r_0,.\ r_0 : \varphi(r_0) = 1 - r_0\}$.

Имеет место [5]

Лемма. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{f}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Введем множество функций

$$B^l(S) =$$

$$= \{f(r,\theta) : f \in W_2^l(S), \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left(\left\|f_n^k(r)\right\|^2_{C^2((0,1))} + \right.$$

$$\left. + \left\|f_n^k(r)\right\|^2_{C^1([0,1])}\right)\exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty,$$

$$l \geq m-1\}.$$

Пусть $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in W_2^l(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, $i = 1,...,m$, $l \geq m+1$ и $\tau(r,\theta) = r^2\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) = r^2\nu^*(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta) = r^2\sigma^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta) \in B^l(S)$, $\sigma^*(r,\theta) \in B^l(\widetilde{S})$, $\varphi(r,\theta) \in B^l(S/\widetilde{S})$. Тогда имеет место

Теорема 2. Задача 3 однозначно разрешима, а задача 4 имеет единственное решение.

Если $\beta = 1$, в [6] доказана

Теорема 3. Задача 3 имеет бесчисленное множество решений.

Пусть теперь $0 < \beta \leq 1$. Тогда из теорем 2 и 3 вытекает справедливость следующего критерия: задача 3 однозначно разрешима $\Leftrightarrow \beta < 1$.

В заключение отметим, что для многомерного волнового уравнения задачи 3 и 4 изучались в [7-9].

Замечание. В теореме 2 принадлежность заданных функций множеству $B^l(S)$ существенна. Как показывают примеры, построенные в [4], при нарушении этого условия, решение задачи 3, даже для многомерного волнового уравнения, может не существовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448с.

2. *Protter M.H.* // J. Rational Mech. And Analysis. 1954. V. 3, N4. P. 435-446.

3. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд. АН СССР, 1959. 446 с.

4. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Ғылым, 1994. 170 с.

5. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

6. *Алдашев С.А., Нуржанов Ш.Т.* // Вестник КазГУ. Сер. мат., мех., инф. Алматы, 1997. №8. С. 6-16.

7. *Алдашев С.А.* // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. наук. Алматы, 2007. №3. С. 3-7.

8. *Алдашев С.А.* // Доклады НАН РК. Алматы, 1995. №1. С. 35-37.

9. *Алдашев С.А.* // Укр. матем. журнал. 1996. Т. 48, №5. С. 701-705.

Резюме

Жазықтықта және кеңістікте гиперболалық теңдеулерге сипаттамадан ауытқыған Дарбу есептері және оған түйіндес есептер зерттелген.

Западно-Казахстанский аграрно-технический университет им. Жангир хана, г. Уральск

Поступила 20.03.08г.