УДК 517.938

Т.М. АЛДИБЕКОВ

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

(Представлена академиком НАН РК К.А. Касымовым)

В работе установлены необходимые и достаточные условия полунепрерывности и непрерывности обобщенных показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений с неограниченными непрерывными коэффициентами.

Рассматривается [1] система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad (1)$$

где $x \in R^n$, $t \in I$, $A \in M_n^+(\psi)$. Имеет место утверждение.

Лемма 1. Старший обобщенный показатель системы (1) определяется по формуле

$$\lambda(A) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \ln\|X_A(t,0)\|, \qquad (2)$$

где $q(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau$, $X_A(t,0)$ – матрица Коши системы (1).

Пусть $-\infty < \lambda_n(A) \le \ldots \le \lambda_1(A) < +\infty$, обобщенные показатели системы (1), где $\lambda_1(A)$ старший обобщенный показатель, а $\lambda_n(A)$ – младший верхний обобщенный показатель. Обобщенные показатели Ляпунова $\lambda_k(A), k \in \{1,\ldots,n\}$, обобщенно-верхний центральный показатель $\Omega(A)$ и обобщенно-нижний центральный показатель $\omega(A)$ системы (1) из пространства $M_n^+(\psi)$ будем рассматривать как функционалы, определенные на этом пространстве. Линейное преобразование $x = L(t)y$ называется обобщенным Ляпуновским, если матрицы $L(t)$, $L^{-1}(t)$ непрерывные ограниченные на всей полуоси, а матрица $\dot{L}(t)$ непрерывна и $\dot{L}(t) \in M_n^+(\psi)$.

Теорема 1. Старший обобщенный показатель, как функционал $\lambda(\cdot): M_n^+(\psi) \to R$ полунепрерывен сверху в точке $A \in M_n^+(\psi)$, тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\lambda(A) = \Omega(A)$.

Доказательство. Достаточность следует из полунепрерывности сверху функционала $\Omega(\cdot): M_n^+(\psi) \to R$. Необходимость. Имеет место равенство

$$\Omega(q) = \lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{q(mT)} \sum_{j=0}^{m-1} \ln|X((j+1)T, jT)|,$$ где

$X(t,s)$ – матрица Коши системы (1). Пусть функционал $\lambda(\cdot)$ полунепрерывен сверху в точке $A \in M_n^+$.. Следуя работе [2], для любого $\varepsilon > 0$ зафиксируем T_0 такое, что $e^{\frac{\varepsilon}{2}q(T_0)} \sin^2 \varepsilon \ge 1$. Выберем T так, чтобы число

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{q(mT)} \sum_{i=0}^{m-1} \ln\|X_A(i+1)T, iT)\| \ge \Omega(A) - \frac{\varepsilon}{4}, \qquad (3)$$

где $\frac{T}{T_0} = s$ – целое, $4(2a+\varepsilon)T_0/T < \varepsilon/4$, $a = \sup_{t\ge0} \frac{\|A(t)\|}{\psi(t)}$

Пусть $x_i(t) = X_A(t, iT)x_i$ решения системы (1),

где x_i, $i = 0,1,2...$ единичный вектор, для которого выполняется равенство

$$\|X_A((i+1)T, iT)x_i\| = \|X_A((i+1)T, iT)\| \qquad (4)$$

Построим возмущение. Положим $B_\varepsilon(t) = 0$ при $0 \le t \le T$.

Пусть на отрезке $T \le t \le 2T$ выполняется неравенство $\frac{\|x_1(2T)\|}{\|x_1(T)\|} : \frac{\|x_0(2T)\|}{\|x_0(T)\|} \ge \exp(\frac{\varepsilon}{2} q(T))$. Разделим отрезок $[T, 2T]$ на s равных частей длины T_0 и берем первый из отрезков, слева на концах которых выполняется неравенство

$$\frac{\|x_1(T + i_1T_0)\|}{\|x_1(T + (i_1 - 1)T_0)\|} : \frac{\|x_0(T + i_1T_0)\|}{\|x_0(T + (i_1 - 1)T_0\|} \ge \exp(\frac{\varepsilon}{2} q(T_0)),$$

$i_1 \in \{1, ..., s\}$.

Строим возмущение $B_\varepsilon(t)$ при $T \le t \le 2T$ следующим образом.

А) $B_\varepsilon(t) = 0$ при $t \in (T, T + (i_1 - 2)T_0) \cup (T + i_1T_0, 2T_0]$

Б) $B_\varepsilon(t) = U_\varepsilon^{-1}(t)A(t)U_\varepsilon(t) - U_\varepsilon^{-1}(t)\dot{U}_\varepsilon(t) - A(t)$ при $t \in [T + (i_1 - 2)T_0, T + (i_1 - 1)T_0]$

Так как $x_0(t)$– решение системы (1), то $y_0(t) = x_0(t)$ при $t < T + (i_1 - 2)T_0$ и $y_0(t) = U_\varepsilon^{-1}(t)x_0(t)$ при $t \in [T + (i_1 - 2)T_0, T + (i_1 - 1)T_0]$ есть решение системы

$$\dot{y} = A(t)y + B_\varepsilon(t)y, \qquad (5)$$

где $U_\varepsilon(t)$ ортогональная матрица, обладающая свойствами

а) $U_\varepsilon(T + (i_1 - 2)T_0) = E$, б) $\|\dot{U}_\varepsilon(t)\| \le \frac{\varepsilon}{q(T_0)}$.

Угол $\angle(x_0(T + (i_1 - 1)T_0), y_0(T + (i_1 - 1)T_0)) = \varepsilon$,

$$y_0(T + (i_1 - 1)T_0) = \alpha_1 x_0(T + (i_1 - 1)T_0) + \\ + \alpha_2 x_1(T + (i_1 - 1)T_0), (\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0).$$

При $t \in [T + (i_1 - 1)T_0, T + i_1T_0]$ берем $B_\varepsilon(t)$ как в Б) и $U_\varepsilon(t)$ так, чтобы $U_\varepsilon(T + (i_1 - 1)T_0) = E$ и вектор $U_\varepsilon^{-1}(T + i_1T_0)[\alpha_1 x_0(T + i_1T_0) + \alpha_2 x_1(T + i_1T_0)]$ был коллинеарен вектору $x_1(T + i_1T_0)$. Далее на отрезках $[2T, 3T]$,... возмущение $B_\varepsilon(t)$ аналогично строится. Заметим, что $A + B_\varepsilon \in M_n^+(\psi)$. В силу построения при любом $i = 0,1,2...$ имеет место неравенство $\frac{\|y_0((i+1)T)\|}{\|y_0(iT)\|} \ge \frac{\|x_i((i+1)T\|}{\|x_i(iT)\|} \exp(-\frac{3\varepsilon}{4} q(T))$. Отсюда в силу формул (2-4) для любого $\varepsilon > 0$ получаем, что $\lambda(A + B_\varepsilon) > \Omega(A) - \varepsilon$, где $\lambda(A + B_\varepsilon)$ обобщенный показатель решения $y_0(t), y_0(0) = x_0(0)$ системы (5) и так как для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\lambda(A + B_\varepsilon) \le \Omega(A + B_\varepsilon) < \Omega(A) + \varepsilon$, то имеет место $\lambda(A) = \Omega(A)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Младший верхний обобщенный показатель, как функционал

$\lambda_n(\cdot) : M_n^+ \to R$ полунепрерывен снизу в точке $A \in M_n^+$, тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\lambda_n(A) = \omega(A)$.

Доказательство. Число $\omega(q) = \sup_{r \in H(A,q)} \omega(r, q)$,

где $\omega(r, q) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_0^t r_q(\tau) dq(\tau)$ определяет $\omega(A)$.

Теперь из (1), переходя к сопряженной системе и учитывая знаки обобщенно-верхних и обобщенно-нижних функций, в силу теоремы 1 получим утверждение теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если система (1) имеет равные обобщенные показатели $-\infty < \lambda_n(A) = ... = \lambda_1(A) < +\infty$, то обобщенные показатели $\lambda_k(A), k \in \{1, ..., n\}$, как функционалы из пространства $M_n^+(\psi)$ непрерывны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\Omega(A) = \omega(A)$.

Определение 1. Линейная система (1) называется экспоненциально разделенной системой относительно $q(t)$, если она имеет решения, $x_1(t), ..., x_n(t)$, для которых при всех $t \ge s$ выполняются неравенства $\frac{\|x_{i-1}(t)\|}{\|x_{i-1}(s)\|} : \frac{\|x_i(t)\|}{\|x_i(s)\|} \ge Be^{\alpha[q(t) - q(s)]}, i = \overline{2, n}$ с некоторыми постоянными $\alpha > 0, B > 0$.

Теорема 4 Если линейная система (1) экспоненциально разделенная относительно $q(t)$, то обобщенно-верхние характеристические показатели $\lambda_k(A), k \in \{1, ..., n\}$ относительно $q(t)$ являются непрерывными функционалами в точке $A \in M_n^+(\psi)$.

Доказательство. Если система (1) экспоненциально разделенная относительно $q(t)$, то она обобщенным преобразованием Ляпунова приводится к диагональной системе, причем для диагональных коэффициентов выполняются условия разделенности. Следовательно, $\lambda_k(A)$, $k \in \{1, ..., n\}$

есть непрерывные функционалы в точке $A \in M_n^+(\psi)$. Теорема 4 доказана.

Пусть $\Lambda_m < \Lambda_{m-1} < ... < \Lambda_1$ – обобщенные показатели Ляпунова системы (1) соответственно кратности n_m, n_{m-1}, ..., n_1.

Лемма 2. Если обобщенные показатели Ляпунова системы (1) непрерывны, то существует обобщенное Ляпуновское преобразование $x = V(t)\xi$, приводящее систему (1) к блочно-треугольному виду $\frac{d\xi}{dt} = B(t)\xi$, где $B(t) = diag\{B_1(t), B_2(t), ..., B_m(t)\}$ и каждая из матриц $B_k(t)$ является верхней треугольной порядка n_k, а все решения системы-блока $\frac{d\xi^{(k)}}{dt} = B_k(t)\xi^{(k)}$ имеют обобщенные показатели, равные Λ_k.

Определение 2. Линейная система (1) называется экспоненциально разделенной с индексом $k \in \{1,...,n-1\}$ относительно $q(t) \in Q$, если в векторном пространстве ее решений имеется k-мерное векторное подпространство L^k и для какого-нибудь алгебраического дополнения M^{n-k} векторного подпространства L^k в пространстве решений L^n существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что имеет место неравенство $\frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} \geq \beta \frac{\|y(t)\|}{\|y(s)\|} \exp(\alpha[q(t) - q(s)])$, где $y(\cdot)$ – любое ненулевое решение из подпространства L^k, $x(\cdot)$ – любое ненулевое решение из M^{n-k}, $t \geq s \geq 0$ – любые, а положительные константы α и β не зависят от $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, t, s.

Лемма 3. Если для фиксированного $k \in \{1,...,n-1\}$ имеет место неравенство $\lambda_{n-k+1}(q) < \lambda_{n-k}(q)$ и обобщенные показатели системы (1) непрерывны, то система (1) экспоненциально разделена с индексом $k \in \{1,...,n-1\}$.

Теорема 5. Для того чтобы функционалы $\lambda_k(A)$, $k \in \{1,...,n\}$ были непрерывны в точке $A(t) \in M_n^+(\psi)$, необходимо и достаточно, чтобы система (1) некоторым обобщенным Ляпуновским преобразованием $x = V(t)u$, приводилась к блочно-треугольному виду $\dot{u} = B(t)u$, где $B(t) = diag\{B_1(t), B_2(t), ..., B_m(t)\}$, $B_i(t)$ – треугольная матрица порядка $n_i, \sum_{i=1}^{m} n_i = n$, причем:

1) блоки экспоненциально разделены относительно $q(t)$, т.е. существуют константы $\alpha > 0, \beta > 0$ такие, что $\|U_i(t,s)\| \geq \beta \exp\{\alpha[q(t) - q(s)]\}\|U_{i+1}(t,s)\|$, $t \geq s \geq 0, i = 1,2,...,m-1$, где $U_i(t,s)$ – матрица Коши блок-системы $\dot{u}_i = B_i(t)u_i$, 2) у каждой блок-системы обобщенно-верхний $\Omega(B_i)$ и обобщенно-нижний $\omega(B_i)$ центральные показатели совпадают.

Доказательство. Достаточность. Как известно, имеют места неравенства $\omega(B_i) \leq \Lambda_i \leq \Omega(B_i)$, $(i = 1,2,...,m)$. В силу условия 2) теоремы имеют места равенства $\Lambda_i = \Omega(B_i) = \omega(B_i)$, $(i = 1,2,...,m)$. В силу независимости системы-блоков и используя теоремы 3 отсюда получаем, что функционалы $\lambda_k(A)$, $k \in \{1,...,n\}$ непрерывны в точке $A(t) \in M_n^+(\psi)$. Необходимость. Пусть обобщенные показатели непрерывны в точке $A(t) \in M_n^+(\psi)$. Тогда в силу леммы 2 система (1) приводится к блочно-треугольному виду. Из леммы 3 следует, что блоки экспоненциально разделены относительно $q(t)$. В силу теоремы 3 у каждой блочно-треугольной системы обобщенно-верхний и обобщенно-нижний центральные показатели совпадают. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алдибеков Т.М.* Об интегрально-разделенных линейных системах с неограниченными коэффициентами.//Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. 2009. №5 (64). С. 22-26.

2. *Миллионщиков В.М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем. //Сиб.мат.ж., 1969. 10. №1. С. 99-104.

Резюме

Коэффициенттері шектелмеген үзіліссіз сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің жартылай үзіліссіз және үзіліссіз болуының қажетті және жеткілікті шарттары орнатылған.

Summary

In this work established some necessary and sufficient conditions of the semi-continuity and continuity of Lyapunov's overall indexes of the leaner system of difference equations with unlimited continuous coefficient.

Каз НУ им. аль-Фараби *Поступила 5.02.10 г.*