MSC 81Q05, УДК 530.45

Л. А. АЛЕКСЕЕВА

УРАВНЕНИЕ ДИРАКА И ЕГО ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ. 2. СКАЛЯРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И БИКВАТЕРНИОНЫ СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

Институт математики МОН РК, г. Алматы

Исследуется уравнение квантовой механики – уравнение Дирака и его решения. Предложена бикватернионная форма обобщенного уравнения Дирака (однородного и неоднородного) и рассмотрены его обобщенные решения в бикватернионной форме. Построены нестационарные, статические и гармонические по времени скалярные потенциалы и порождаемые ими спиноры и спинорные поля.

Ключевые слова: *бикватернион, биградиент, уравнение Дирака, уравнение Клейна-Гордона-Фока-Шредингера, бикватернионное представление, обобщенное решение, спинор, ω-спинор.*

Настоящая статья является продолжением [1], где построена бикватер-нионная форма уравнения Дирака:

$$\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{B}=\mathbf{F}(\tau,x). \tag{2.1}$$

Операторы Дирака $\mathbf{D}_m^{\pm}=\partial_\tau+m\pm i\nabla$ (m-комплексное число) задаются в бикватернионной форме, и их действие аналогично операции умножения в алгебре бикватернионов. В частности, действие *биградиентов* $\nabla^{\pm}$ задается формулой (соответственно берется верхний либо нижний знак):

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B}=\left(\partial_\tau\pm i\nabla\right)\circ\left(b(\tau,x)+B(\tau,x)\right)=$$
$$=\left(\partial_\tau b\mp i\operatorname{div}B\right)+\partial_\tau B\pm i\operatorname{grad}b\pm i\operatorname{rot}\mathrm{B}=\mathbf{G}(\tau,x)$$

В [1] построены обобщенные решения (2.1) через решения КГФШ-уравнения:

$$\Box u+m^2u+2m\partial_\tau u=f(\tau,x). \tag{2.2}$$

Построим *скалярные потенциалы* – решения уравнения (2.2), и дадим бикватернионное представление решений однородного и неоднородного уравнения Дирака (2.1).

2.1. Обобщенные решения КГФШ-уравнения. Скалярные потенциалы. Для построения решения (2.1), как следует из теоремы 1.3.1 [1], необходимо найти фундаментальное решение КГФШ-уравнения.

Теорема 2.1.1. *Фундаментальные решения КГФШ - уравнения* (2.2) *имеют вид:*

$$\psi^m=\frac{1}{4\pi\|x\|}\left(aH(\tau)e^{-m\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)+(1-a)H(-\tau)\delta(\tau+\|x\|)e^{m\|x\|}\right)+\psi_0^m, \tag{2.3}$$

где $\delta(\tau\pm\|x\|)$ *– простой слой на конусе;* $H(\tau)$ *– функция Хевисайда, a – константа,* $\psi_0^m(\tau,x)$ *- решение однородного КГФШ-уравнения.*

Доказательство. Для доказательства формулы теоремы используем преобразование Фурье (ПФ) обобщенных функций. Далее переменные Фурье, соответствующие (τ, x), обозначаем (ω,ξ) соответственно.

Из (2.2), при $f(\tau,x)=\delta(x)\delta(\tau)$, следует, что ПФ по τ функции $\psi^m(\tau,x)$ (обозначим его $F_\tau[\psi^m]$), является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца:

$$\left\{\Delta-k^2\right\}F_\tau[\psi^m]+\delta(x)=0,\quad k=i\omega-m. \tag{2.4}$$

Оно известно [2], с точностью до решения однородного уравнения, его можно представить в виде:

$$F_\tau[\psi^m]=\frac{1}{4\pi\|x\|}\left(ae^{-k\|x\|}+(1-a)e^{k\|x\|}\right), \tag{2.5}$$

где a – произвольная константа. Следовательно,

$$F_\tau[\psi^m] = \frac{1}{4\pi\|x\|}\left(ae^{(i\omega-m)\|x\|} + (1-a)e^{-(i\omega-m)\|x\|}\right). \tag{2.6}$$

Отсюда, используя свойства ПФ, при обратном преобразовании по ω получим формулу теоремы, где носитель по времени первого слагаемого $\tau > 0$, а второго $\tau < 0$. Это расширяющиеся и сужающиеся со временем в R^3 с единичной скоростью сферы радиуса $|\tau|$. Ч.т.д.

Если $m = i\rho$, – чисто мнимое число и носитель решения $\tau > 0$, то

$$\psi^m = \frac{e^{-i\rho\|x\|}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\cdot \tag{2.7}$$

Здесь плотностью простого слоя на световом конусе является фундамен-тальное решение уравнения Гельмгольца с волновым числом ρ [2].

Решения однородного КГФШ-уравнения. Фундаментальные решения уравнения определяются с точностью до решения однородного уравнения. Построим решения однородного КГФШ-уравнения:

$$\Box u + m^2 u + 2m\partial_\tau u = 0\ . \tag{2.8}$$

В пространстве ПФ из (2.4) имеем:

$$\left(\|\xi\|^2 - \omega^2 + m^2 - 2im\omega\right)F_{\omega,\xi}\left[u(\tau,x)\right] = \left(\|\xi\|^2 - (\omega+im)^2\right)u^*(\omega,\xi) = 0, \tag{2.9}$$

где $u^*(\omega,\xi) = F_{\omega,\xi}\left[u(\tau,x)\right]$ – полное ПФ по τ, x. Если $\mathrm{Re}m \neq 0$, тогда $\|\xi\|^2 - (\omega+im)^2 \neq 0$ при $\forall\xi \in R^3$. В этом случае это уравнение имеет только тривиальное нулевое решение: $u^* = 0$. Однако при чисто мнимом $m = i\rho$ уравнение (2.9) имеет бесчисленное множество решений:

$$u^*(\omega,\xi) = \phi(\omega,\xi)\delta\left(\|\xi\|^2 - (\omega-\rho)^2\right), \tag{2.10}$$

где $\phi(\omega,\xi)$ – *плотность простого слоя* – произвольно заданная функция *на конусах* $\|\xi\| = |\omega-\rho|$. Вычисляя оригинал, получим:

$$u(\tau,x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\|\xi\|=|\omega-\rho|} \phi(\omega,\xi)\exp\left(-i(\xi,x) - i\omega\tau\right)dS(\xi) =$$

$$= \frac{e^{-i\rho\tau}}{(2\pi)^4}\int_{R^3}\left\{\phi(\rho+\|\xi\|,\xi)e^{-i\|\xi\|\tau} - \phi(\rho-\|\xi\|,\xi)e^{i\|\xi\|\tau}\right\}\exp\left(-i(\xi,x)\right)dV(\xi)\cdot$$

Здесь $dS(\xi)$ – дифференциал площади поверхности сферы радиуса, указанного под знаком соответствующего интеграла, $dV(\xi) = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$.

Теорема 2.1.2. *Если* $\mathrm{Re}m \neq 0$, *то однородное КГФШ - уравнение имеет только единственное нулевое решение. Если* $\mathrm{Re}m = 0, m = i\rho$, *решения при* $\tau \geq 0$ *могут быть представлены в виде:*

$$\psi_\rho(\tau,x) = e^{-i\rho\tau}\int_{R^3}\phi(\xi)\exp\left(i\left((\xi,x) \pm \|\xi\|\tau\right)\right)dV(\xi), \tag{2.11}$$

где $\forall\phi(\xi) \in L_1(R^3)$, *либо в виде суммы таких решений.*

2.2. Обобщенные решения однородного уравнения Дирака. Бикватернионное представление спинорных полей. Рассмотрим бикватернионные решения однородного уравнения Дирака:

$$\left(\nabla^\pm + m\right)\mathbf{S} = 0\ . \tag{2.12}$$

В квантовой механике их называют *спинорами* [3,4].

Теорема 2.2.1. *Ненулевое решение УрД* (2.12) *существует лишь при мнимом* $m = i\rho$ *и его можно представить в виде свертки:*

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}_m^\mp\left(\psi_0^m * \mathbf{C}(\tau,x)\right), \tag{2.13}$$

где **C** *– произвольный бикватернион, а* ψ_0^m *– решение однородного КГФШ - уравнения* (2.12), *либо представимо в виде суммы решений подобного вида.*

Доказательство. Подставляя (2.13) в (2.12), с учетом свойства:

$$\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{D}_m^{\mp} = \Box + 2m\partial_\tau + m^2$$

получим (соответственно верхнему или нижнему знакам):

$$\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{S} = \mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{D}_m^{\mp}\left(\psi_0^m * \mathbf{C}\right) = \left(\Box\psi_0^m + 2m\partial_\tau\psi_0^m + m^2\psi_0^m\right) * \mathbf{C} = 0 \cdot$$

Обратно, если $\mathbf{S}$ - решение (2.12), тогда:

$$\left(\Box + 2m\partial_\tau + m^2\right)\mathbf{S} = \mathbf{D}_m^{\mp}\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{S} = \mathbf{D}_m^{\mp}0 = 0$$

Т.е. и скалярная часть и компоненты векторной части **S** являются решением однородного КГФШ-уравнения. Следовательно, **S** можно представить в виде суммы решений вида (2.13).

В частном случае, когда **C** = 1, получим решение вида:

$$\mathbf{\Psi}_0^{\mp}(\tau, x, m) = \left(\nabla^{\mp} + m\right)\psi_0^m = m\psi_0^m + \partial_\tau\psi_0^m \pm i\,grad\,\psi_0^m, \tag{2.14}$$

которое назовем *спинором скалярного поля* $\psi_0^m(\tau, x)$.

Используя его, представим спинор в виде:

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Psi}_0^m(\tau, x) * \mathbf{C}(\tau, x), \tag{2.15}$$

где $\mathbf{C}(\tau, x)$ – произвольный бикватернион, допускающий эту свертку. Последнее зависит от свойств скалярного потенциала $\psi_0^m(\tau, x)$, вид которого дает теорема 2.1.2.

Поскольку определяющими в спиноре (2.15) являются скалярно-векторное поле $\mathbf{C}(\tau, x)$ и потенциал ψ_0^m, соответствующий им спинор назовем *спинорным* $\mathbf{C}$*-полем, порождаемым потенциалом* ψ_0^m.

2.3. Скалярные гармонические потенциалы спиноров. Рассмотрим (2.11), где под интегралом стоят две плоские гармонические волны:

$$\varphi_\xi^{\pm}(\tau, x) = \exp\left(i\left((\xi, x) - \rho\tau \pm \|\xi\|\tau\right)\right), \tag{2.15}$$

которые сами являются решениями при КГФШ- уравнения (2.8). Волновой вектор ξ определяет направление движения волны, длина которой равна $\lambda = 2\pi/\|\xi\|$, частота $\omega = \left|\rho \pm \|\xi\|\right|$, период $T = 2\pi/\left|\rho \pm \|\xi\|\right|$. В зависимости от знака, одна из них *сверхсветовая* (V>1) , а другая - *досветовая* (V<1) , так как фазовая скорость движения волны $V = 1 \pm \dfrac{\rho}{\|\xi\|}$. При $\|\xi\| \to \infty$ частота $\omega \to \infty$, а $V \to 1 \pm 0$. При $\|\xi\| \to |\rho|$ скорости $V \to 1; 0$, а частоты соответственно $\omega \to \dfrac{\pi}{\rho}; \infty$. Спиноры, порождаемые этими волнами, имеют вид:

$$\left(\nabla^{\mp} + i\rho\right)\varphi_\xi^{\pm}(\tau, x) = \pm\left(i\|\xi\| + \xi\right)\varphi_\xi^{\pm}.$$

Определение. Назовем *гармоническими спинорами* бикватернионы

$$\mathbf{S}_\xi^{\pm} = \frac{\varphi_\xi^{\pm}}{\sqrt{2}}\left(i + \frac{\xi}{\|\xi\|}\right), \quad \left\|\mathbf{S}_\xi^{\pm}\right\| = 1, \quad \left\langle \mathbf{S}_\xi^{\pm}\right\rangle = 0 \cdot \tag{2.16}$$

Используя гармонические спиноры и формулу (2.13), получим *бикватернионное представление спиноров* $\mathbf{C}$-поля через $\mathbf{S}_\xi^{\pm}$.

Теорема 2.3.1. *Спиноры* $\mathbf{C}$ *- поля можно представить в виде свертки:*

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}(\tau, x) * \mathbf{S}_\xi^{\pm}(\tau, x), \tag{2.17}$$

либо

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}(\tau, x) * \int\limits_{R^3} \phi(\xi)\mathbf{S}_{\xi}^{\pm}(\tau, x)dV(\xi)\cdot \tag{2.18}$$

где $\mathbf{S}_{\xi}^{\pm}$ *– гармонические спиноры* (2.16), $\phi(\xi) \in L_1(R^3)$, *либо в виде линейной комбинации подобных спинорных полей.*

2.4. Стационарные и статические решения уравнения Дирака. Рассмотрим также важный для приложений класс решений уравнения Дирака вида $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x)e^{-i\omega\tau}$, которые описывают гармонические колебания с частотой ω. Предполагается, что правая часть (2.1) имеет ту же структуру. Тогда для комплексных амплитуд получим уравнение вида:

$$\left(\nabla_{\omega}^{\pm} + \rho\right)\mathbf{B}(x) = \mathbf{F}(x), \tag{2.20}$$

где ω – *биградиенты* $\nabla_{\omega}^{\pm} = \omega \pm \nabla$, ρ – действительное число. Решения однородного уравнения назовем ω*-спинорами*. Также прямым вычислением доказывается следующее свойство.

$$\left(\nabla_{\omega}^{\pm} + \rho\right)\left(\nabla_{\omega}^{\mp} + \rho\right) = \left(\omega + \rho + \nabla\right)\left(\omega + \rho - \nabla\right) = \left(\omega + \rho\right)^2 + \Delta\,. \tag{2.21}$$

На его основе аналогично, как в нестационарном случае, доказана теорема.

Теорема 2.4.1. *Решения уравнения* (2.20) *для комплексных амплитуд можно представить в виде суммы бикватернионов:*

$$\mathbf{B} = \left(\nabla_{\omega}^{\mp} + \rho\right)\left(\chi * \mathbf{F}\right) + \mathbf{S}^{\omega}, \tag{2.22}$$

где $\chi^{\omega} = -\dfrac{ae^{ik\|x\|}}{4\pi\|x\|} - \dfrac{(1-a)e^{-ik\|x\|}}{4\pi\|x\|}$, $k = |\omega + \rho| \neq 0$, *и соответствующего спинора* $\mathbf{S}^{\omega} = \left(\nabla_{\omega}^{\mp} + \rho\right)\left(\chi_0 * \mathbf{C}(x)\right)$, *где* $\chi_0(x)$ – *решение уравнения Гельмгольца:*

$$\Delta\chi_0 + k^2\chi_0 = 0, \tag{2.23}$$

$\forall a$, $\mathbf{C}(x)$ – *произвольный бикватернион, допускающий свертку.*

Гармонические ω-спиноры. Используя преобразования Фурье по *x* из (2.23) получим:

$$\left(\|\xi\|^2 - k^2\right)\chi_0^*(\xi) = 0 \;\Rightarrow\; \chi_0^* = g(\xi)\delta\left(\|\xi\|^2 - k^2\right),\ \forall g(\xi) \;\Rightarrow$$

$$\chi_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\|\xi\|=k} g(\xi)\, e^{-i(\xi,x)}dS(\xi) = \frac{k^2}{(2\pi)^3}\int\limits_{\|\mathbf{e}\|=1} g(k\mathbf{e})\, e^{-ik(\mathbf{e},x)}dS(\mathbf{e})\cdot$$

Откуда: $\chi_0(x) = \int\limits_{\|\mathbf{e}\|=1} p(\mathbf{e})\, e^{-ik(\mathbf{e},x)}dS(\mathbf{e})$, где $p(\mathbf{e})$ – $\forall$ интегрируемая функция.

Гармонические ω-спиноры определим как спиноры вида:

$$\mathbf{\Psi}_0^{\omega}(x,\mathbf{e}) = \frac{1}{k\sqrt{2}}\left(\nabla_{\omega}^{\mp} + \rho\right)e^{-ik(\mathbf{e},x)} = \frac{1}{k\sqrt{2}}\left(\omega + \rho - ik\mathbf{e}\right)e^{-ik(\mathbf{e},x)} \Rightarrow$$

$$\left\|\mathbf{\Psi}_0^{\omega}\right\| = 1, \quad \left\langle\mathbf{\Psi}_0^{\omega}\right\rangle = 0\,. \tag{2.24}$$

Здесь $\mathbf{e}$ – *направление* ω-спинора, $k = |\omega + \rho|$ – его волновое число. Через них также можно представить комплексные амплитуды ω-спиноров.

Теорема 2.4.2. *ω-спиноры – можно представить в виде свертки:*

$$\mathbf{S}^{\omega} = \mathbf{G}(x) * \mathbf{\Psi}_0^{\omega}(x,\mathbf{e}) \tag{2.25}$$

либо

$$\mathbf{S}^{\omega} = \mathbf{G}(x) * \int\limits_{\|\mathbf{e}\|=1} p(\mathbf{e})\mathbf{\Psi}_0^{\omega}(x,\mathbf{e})dS(\mathbf{e}) \cdot \tag{2.26}$$

где $\mathbf{\Psi}_0^{\omega}(\tau, x)$ *-гармонические ω-спиноры,* $\forall p(\mathbf{e}) \in L_1(Sp_{\mathbf{e}}), Sp_{\mathbf{e}} = \{\mathbf{e} \in R^3 : \|\mathbf{e}\| = 1\}$.

Статические спиноры получим при $\omega = 0$. Формулы теоремы 2.4.2 при этом сохраняют вид, так как $k = |\rho| \neq 0$.

Заключение. В [5,6] показано, что уравнения Максвелла приводятся к биволновому уравнению ((2.1) при $m = 0$).

Можно ввести для спиноров бикватернион *энергии-импульса*:

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{S}_m \circ \mathbf{S}_m^* = \left(|s_m|^2 + \|S_m\|^2\right) + 2i\left(\mathrm{Im}(\overline{s}_m S_m) + \left[\mathrm{Im}\, S_m, \mathrm{Re}\, S_m\right]\right),$$

по аналогии с бикватернионом *энергии-импульса* электромагнитного (ЭМ) поля, где в скалярной части стоят плотность энергии ЭМ-поля, а в векторной части – вектор Умова-Пойнтинга [6].

Заметим, что решения уравнений Дирака (2.1) получены в классе обобщенных функций, что позволяет строить решения как для классических бикватернионных функций, так и при наличии сингулярных источников в его правой части, которые можно использовать при построении бикватернионной теории элементарных частиц. При вычислении спинорных полей, используя свойства дифференцирования свертки, производные можно перебрасывать на компоненты **C**-поля, когда это удобно, которые тоже могут быть сингулярными обобщенными функциями.

ЛИТЕРАТУРА

1 Алексеева Л.А. Уравнения Дирака и его обобщенные решения. 1. Бикватернионная форма и КГФШ-уравнение // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2011.

2 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976.

3 Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.Квантовые поля. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

4 Математическая энциклопедия. – М.: Наука, 1982. – Т. 2.

5 Алексеева Л.А. Кватернионы гамильтоновой формы уравнений Максвелла // Математический журнал. – 2003. – Т. 3, № 4. – С. 20-24.

6 Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравимагнитного поля // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2009. – Т. 6, № 1. – С. 122-134.

Л. А. Алексеева

ДИРАК ТЕҢДЕУІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ЖАЛПЫЛАМА ШЕШІМДЕРІ.
2. СКАЛЯР ӘЛЕУЕТТЕРІ ЖӘНЕ СПИНОРЛЫҚ ӨРІСТЕРДІҢ БИКВАТЕРНИОНДАРЫ

Кванттық механиканың теңдеуі – Дирак теңдеуі мен оның шешімі зерттелген. Жалпыланған Дирак (біртекті және біртексіз) теңдеуінің бикватернион түрі ұсынылған және оның жалпылама шешімдері бикватернион түрінде қарастырылған. Бейстационар, статикалық және уақыт бойынша гармоникалық әлеуеттермен бірге олардың туғызатын спинорлары және спинорлық өрістері тұрғызылған.

L. A. Alexeyeva

DIRAC EQUATION AND ITS GENERALIZED SOLUTIONS.
2. SCALAR POTENTIAL AND BIQUATERNIONS OF SPINOR FIELDS

Dirac equation and its decisions are researched on base of the differential biquaternions algebra. It is offered the biquatornial form of the generalised Dirac equation and its generalised decisions are built in biquatornial form for description of spinors and spinor fields. They are considered also steady-state and harmonic on time spinor fields and their biquatornial form are constructed.

The Keywords: biquaternion, bigradient, Dirac equation, Klein-Gordon-Fokk-Shrödinger-equation, biquaternional interpretation, generalized solutions, spinor, ω-spinor.