

УДК 539.3

А. М. АЛИМЖАНОВ

(Институт механики и машиноведения им. У. А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан)

МОДЕЛЬ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД ДЛЯ РАСЧЕТА НДС И ПРОЧНОСТИ ПОРОД ПРИКОНТУРНОЙ ЗОНЫ ПОДЗЕМНЫХ ВЫРАБОТОК

Аннотация. В статье разработана модель неоднородного упругопластически деформируемого горного массива, в котором механические (прочностные и деформационные) характеристики породы являются непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и параметров нагружения, а физические свойства массива описываются двухзвенной ломанной на диаграмме напряжение-деформация (наклонная и горизонтальная части соответствуют линейно-упругому и идеально-пластическому состоянию), которая почти вертикально изменяет свое положение в процессе нагружения. На основе разработанной модели решены плоская осесимметричная задача для круговой цилиндрической выработки и центрально-симметричная задача для сферической выработки с заданным классом немонотонной неоднородности механических свойств пород. Разработаны методы расчета НДС и прочности пород приконтурной зоны, содержащейся в массиве подземной выработки.

Ключевые слова: неоднородный массив горных пород, цилиндрическая выработка, сферическая выработка, упругопластическая задача, напряженно-деформированное состояние (НДС), прочность.

Тірек сөздер: біртекті емес кен жыныстары қатпары, цилиндр қазба, сфералық қазба, серпімді-созылымдық есеп, кернеулі-деформациялық күй (КДК), беріктік.

Keywords: inhomogeneous rock massif, cylindrical working, spherical working, elastic-plastic problem, stress-strain state (SSS), rock strength.

Введение. При расчетах подземных сооружений на прочность или устойчивость вводится предположение об однородности окружающего массива. Между тем во многих случаях механические свойства пород приконтурной зоны подземных сооружений распределены неравномерно (изменяются по координатам). Зачастую неоднородность пород приконтурной зоны связана с горно-строительным производством (буровзрывные работы, использование камуфлетных взрывов) или с эксплуатацией (наличие кольматационного экрана, воздействие агрессивных соединений или пластовых флюидов). На больших горизонтах элементы сооружений работают в условиях предельных значений действующих нагрузок. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения модели неоднородного упругопластически деформируемого горного массива, позволяющего рассчитывать напряженно-деформированное состояние (НДС) и прочность пород приконтурной зоны, содержащихся в массиве выработок.

1. Основные положения и соотношения модели неоднородного упругопластически деформируемого массива горных пород

Рассмотрим модель неоднородного упругопластически деформируемого горного массива со следующими предположениями:

1) Механические (прочностные (σ_s) и деформационные (E)) характеристики породы являются непрерывными и дифференцируемыми функциями координат x_i ($i \leq 3$) и параметров нагружения χ_j , устанавливающих зависимость механических свойств от граничных условий

$$\sigma_s = \sigma_s(x_i, \chi_j), \quad E = E(x_i, \chi_j). \quad (1)$$

2) Физические свойства массива описываются двузвенной ломанной на диаграмме напряжение-деформация $\sigma_1 - \varepsilon_1$ (наклонная и горизонтальная части соответствуют линейно-упругому и идеально-пластическому состоянию), которая в процессе нагружения непрерывно изменяет свое положение (согласно (1)). Условие пластичности f (изотермическое и квазистатическое нагружение) и ассоциированный закон пластического деформирования имеют вид

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_s(x_i, \chi_j)) = 0, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = g \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3)$$

а закон Гука в упругой области записывается в виде

$$\varepsilon_{ij}^e = E(x_i, \chi_j)^{-1} \left((1 + \mu) \sigma_{ij} - \mu \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) \quad (4)$$

Здесь σ_{ij} , ε_{ij} - компоненты тензоров напряжений и деформаций, $U(\sigma_{ij})$ - пластический потенциал, в качестве которого принимается функция f , g - некоторый множитель, E - модуль упругости, μ - коэффициент Пуассона, δ_{ij} - символ Кронекера.

3) Имеют место уравнения равновесия и совместности деформаций

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]. \quad (5)$$

Здесь u_i - компоненты вектора перемещений.

4) Прочностные (σ_s) и деформационные (E) свойства массива распределены прямо или почти прямо пропорционально, в каждой точке имеют место соотношения

$$\sigma_s(x_i, \chi_j) = cN(x_i, \chi_j)E(x_i, \chi_j). \quad (6)$$

Здесь c - некоторая константа материала, $N(x_i, \chi_j)$ - близкая к единице функция «отклонения». Согласно (6) диаграмма $\sigma_1 - \varepsilon_1$ изменяется в направлении, близком к вертикальному. Из (6) следует, что любое положение диаграммы $\sigma_1 - \varepsilon_1$ определяется различными значениями предельного напряжения σ_* , но некоторым фиксированным значением предельной упругой деформации ε_* .

1) предположение позволяет решать задачу аналитическими методами; 2) - 3) предположения моделируют рассматриваемый массив с помощью статических, геометрических и физических уравнений; 4) предположение выделяет негомогенные тела (прямо пропорциональное распределение) и исключает из рассмотрения гетерогенные тела (непропорциональное распределение) как системы с внутренними напряжениями. В ряде работ [1-4] выявлен широкий класс негомогенных геоматериалов (алевролиты, аргилиты, известняки, песчаники, сланцы, глины, суглинки).

Энергия упругой деформации в точках рассматриваемого массива будет, согласно (4), пропорциональна деформационным свойствам

$$W^e = E(x_i, \chi_j)^{-1} \left((1 + \mu) \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \mu (\sigma_{kk})^2 \right). \quad (7)$$

При изотермическом квазистатическом нагружении условие пластичности f (2) можно представить в виде

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_s(x_i, \chi_j)) = \bar{f}(\sigma_{ij}) - h(\sigma_s(x_i, \chi_j)),$$

где $\bar{f}(\sigma_{ij})$ - однородные функции порядка n своих аргументов.

Если условие прочности f совпадает с пластическим потенциалом, то в точках массива работа пластических деформаций пропорциональна прочностным свойствам:

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = dg \cdot n\bar{f}(\sigma_{ij}) = dg \cdot nh(\sigma_s(x_i, \chi_j)) \quad \text{или} \quad \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \sim \sigma_s(x_i, \chi_j) \quad (8)$$

где $d\varepsilon_{ij}^p$ - компоненты тензора приращений пластических деформаций, dg - положительный скалярный множитель.

Введем понятие регулярной поверхности пластичности Σ^P в шестимерном пространстве напряжений, внутри которой $f < 0$. Согласно (2), (8), изолинии прочностных свойств $\sigma_s = \text{const}$ определяют в пространстве напряжений последовательность поверхностей Σ^P и выступают в роли параметра сопротивления неоднородного массива. При этом фазовое пространство тензора напряжений должно быть фиксированным при продвижении по нему поверхности Σ^P . Это налагает следующее условие на величину σ_s :

$$d\sigma_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \chi_j} d\chi_j, \quad d\chi_j \neq 0, \quad dx_i = 0 \quad (9)$$

Приращение параметров $d\chi_j$ в (9) не является произвольным и отвечает определенному виду оптимального нагружения ($d\chi_j = d\chi_j^0$), например, «шаровому» или пропорциональному.

На участках возрастания или постоянства прочностных свойств при выполнении условия (9) имеет место оптимальное активное нагружение. При этом справедлив ассоциированный закон (3) и имеют место соотношения

$$d\varepsilon_{ij}^P \neq 0, \quad f = 0, \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_s} d\sigma_s = 0, \quad d^1 f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0. \quad (10)$$

Поверхность Σ^P в случае (10) равномерно расширяется как поверхность нагружения изотропно упрочняющегося упругопластического тела, но это вызвано не упрочнением горных пород, а их возрастающим сопротивлением.

Согласно (2), (9), разгрузка из состояния на Σ^P на участках возрастания или постоянства прочностных свойств определяется соотношениями

$$d\varepsilon_{ij}^P = 0, \quad f = 0, \quad df = d^1 f < 0 \quad (11)$$

Поверхность Σ^P при разгрузке не изменяется.

На участках с убывающими значениями прочностных свойств пластическое деформирование будет неустойчивым. Оно определяется следующим образом:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^P \neq 0, \quad \int_0^{\Delta \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0. \quad (12)$$

Компоненты ε_{ij}^P не являются определяющими параметрами условия пластичности (2), поэтому рассматриваемое явление (12) в отличие от процесса разупрочнения, сопровождается лишь неконтролируемым снижением уровня напряженного состояния, связанным с убывающим сопротивлением массива, когда поверхность Σ^P быстро и равномерно уменьшается до своего нового устойчивого состояния. При этом ассоциированный закон (3) не выполняется. Этот процесс является локальным, он не охватывает все тело, а ограничивается отдельным участком. В случае прекращения неустойчивого пластического деформирования, возможен процесс дальнейшего развития неупругой зоны.

При неоптимальном нагружении происходит необратимое искривление сетки изолиний прочностных свойств, при котором граница ЗНД характеризуется одним значением σ_s . Искривление фазового пространства тензора напряжений дает следующее условие для величины σ_s :

$$d\sigma_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \sigma_s}{\partial \chi_j} d\chi_j, \quad d\chi_j \neq 0, \quad dx_i \neq 0 \quad (13)$$

Условие (13) в отличие от (9) определяется, прежде всего, приращением параметров нагружения $d\chi_j$. Приращения $d\chi_j$ в (13) являются произвольными, а приращения координат dx_i

зависят от величины отклонения между произвольными и соответствующими оптимальными приращениями $d\chi_j - d\chi_j^0$. При этом имеют место соотношения

$$f = 0, \quad df = 0. \quad (14)$$

Необратимое искривление сетки изолиний в той или иной степени охватывает весь массив. Это явление характеризует изменение структуры массива и сопровождающееся повышенным уровнем диссипации энергии, превышающем работу напряжений на пластических деформациях. Тогда можно записать

$$dQ > \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{или} \quad dQ = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p + dQ_F, \quad (15)$$

где dQ - диссипация при неоптимальном нагружении, dQ_F - диссипация, связанная с необратимым искривлением сетки изолиний прочностных свойств.

В случае $dQ = dQ_F$ искривление сетки изолиний σ_s происходит без продвижения упруго-пластической границы по изолиниям σ_s . Соотношения (13) и (14) в этом случае остаются справедливыми.

Таким образом, рассматриваемая модель опирается на положения теории пластичности, но имеет особенности, обусловленные фактором неоднородности механических свойств материала.

Принятая модель может быть использована в расчетах различных неоднородных элементов конструкций и сооружений в строительстве, нефтегазовой, горнодобывающей и других отраслях промышленности.

Среди широкого класса неоднородных тел определенный интерес представляют тела с осевой или центральной симметрией распределения механических характеристик материала. В настоящей работе рассматривается такой массив с неравномерным распределением как упругих, так неупругих свойств горных пород.

2. Уругопластическая задача для неоднородного горного массива с цилиндрической или сферической выработкой

Задача решается в безразмерных полярных r, θ или сферических координатах r, θ, ψ , где радиальная координата r отнесена к радиусу выработки, т.е. радиус выработки $r = 1$. Массив горных пород с выработкой моделируется невесомым пространством, имеющим цилиндрическую или сферическую емкость; при этом на бесконечности действуют сжимающие гидростатические усилия P , а по контуру выработки действует равномерное давление отпора крепи или содержащегося газа P_0 (рисунок 1).

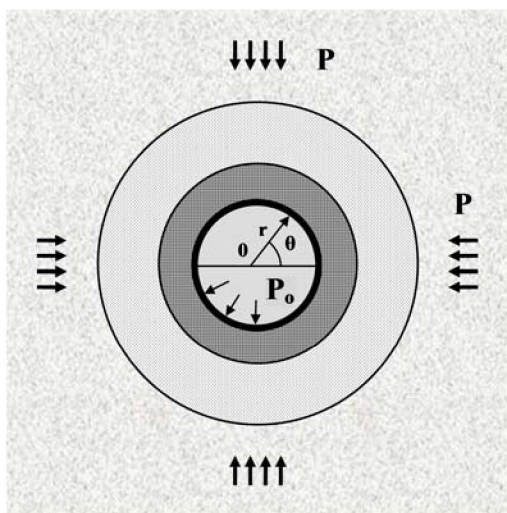


Рисунок 1 – Расчетная схема к определению НДС пород приконтурной зоны подземной выработки в условиях неоднородного горного массива

Тогда граничные условия записываются следующим образом:

$$\sigma_r = P_0 \quad \text{при} \quad r = 1, \quad (16)$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = P \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (17)$$

Действующие нагрузки таковы, что вокруг выработки образуется полностью охватывающая ее зона неупругих деформаций (ЗНД) радиуса r_0 . Область упругих деформаций имеет две зоны: непосредственно примыкающая к ЗНД зона неоднородности радиуса r_1 и охватывающая её однородная упругая область. В неоднородной зоне модуль упругости изменяется радиально $E = E(r)$, а в однородной области модуль упругости имеет постоянное значение $E = E_1 = \text{const}$. Согласно рисунку 1, неоднородность локальна и сосредоточена вокруг контура выработки.

Все положения и соотношения (1)-(15) принятой ранее модели неоднородного упругопластически деформируемого массива горных пород справедливы для рассматриваемой задачи при условии $x_i = r$.

На границах раздела зон имеют место условия сопряжения радиальных компонент напряжений и перемещений (большие квадратные скобки означают скачок указанной величины на переходе через эти границы):

$$[\sigma_r] = [u_r] = 0 \quad \text{при } r = r_0, r = r_1 \quad (18)$$

Нахождение напряженного состояния вокруг подземной выработки

Введем функцию напряжений $F(r)$. Компоненты напряжений могут быть определены следующим образом соответственно при плоском осесимметричном и центральносимметричном деформированном состоянии:

$$\sigma_r = r^{-1}F, \quad \sigma_\theta = F' \quad \text{и} \quad \sigma_r = r^{-2}F, \quad \sigma_\psi = \sigma_\theta = (2r)^{-1}F' \quad (19)$$

Сначала рассмотрим упруго-неоднородную зону с деформационной характеристикой $E = E(r)$.

Основное уравнение относительно функции F при плоском осесимметричном деформированном состоянии имеет вид ($\lambda = \mu/(1-\mu)$, μ - постоянный коэффициент Пуассона)

$$E(r)r^2 F'' + ((2-s)E(r) - E'(r)r)F' - s(E(r) - \lambda E'(r)r)F = 0 \quad (20)$$

Здесь параметр s характеризует вид деформированного состояния. Значению $s = 1$ отвечает плоское осесимметричное состояние, а значению $s = 2$ - центральносимметричное.

В случае $\lambda = 1$ ($\mu = 0.5$), т.е. при отсутствии объемной деформации массива получим решение уравнения (20) в квадратурах:

$$F = C_1 r^s \int E(r) r^{-s-2} dr + C_2 r^s \quad (21)$$

При $\lambda < 1$ ($\nu < 0.5$) получить общее решение вида (21) не представляется возможным и в этом случае необходимо рассматривать конкретный вид функции $E(r)$.

Рассмотрим немонотонное распределение механических свойств пород приконтурной зоны. Такое распределение с одной точкой максимума возникает, например, при создании подземных выработок способом камуфлетного взрыва, оно характерно для нефтегазовых скважин, имеющих коьматационный экран.

Данное распределение образует локальную неоднородность, сосредоточенную вокруг выработки, и может быть описано локальной немонотонной функцией $E(r)$ вида :

$$E(r) = E(r_0) \left(\frac{r}{r_0} \right)^m \exp(a(r^n - r_0^n)) \quad (22)$$

Эта функция имеет два параметра нелинейности m и n и граничную постоянную a , определяемую условием $E(r_1) = E_1$ при $r_0 = 1$.

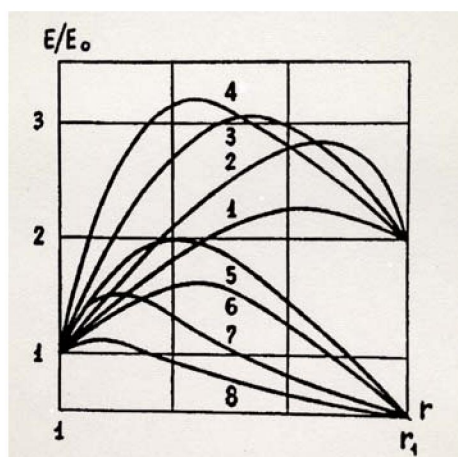
На рисунке 2 показаны ее возможности при описании различных кривых $E(r)$ в зависимости от m и n . Согласно рисунку, знак функции $E'(r)$ может меняться по радиусу r .

Нами получен класс точных аналитических решений уравнения (20) при $\lambda \leq 1$ для локальных немонотонных функций $E(r)$ вида (22).

Точное решение уравнения (20) для функций (22) выражается через гипергеометрические функции Куммера ${}_1F_1 = N(\alpha, \beta, \xi)$ [5]

$$F = C_1 r^{nk} N(\alpha, \beta, ar^n) + C_2 r^{m-nk+s-1} N(\alpha - \beta + 1, 2 - \beta, ar^n) \quad (23)$$

где $\alpha = n^{-1}(nk - sl)$, $\beta = 2k + 1 - (m + s - 1)n^{-1}$, k - действительный корень квадратного уравнения $n^2 k^2 - (m + s - 1)nk + s(\lambda m - 1) = 0$.



- 1 – $m = 1, n = 3$
- 2 – $m = 1, n = 8$
- 3 – $m = 2, n = 2$
- 4 – $m = -3, n = -1$
- 5 – $m = 2, n = 2$
- 6 – $m = 1, n = 3$
- 7 – $m = -2, n = -2$
- 8 – $m = -1, n = -3$

Рисунок 2 – Возможности локальной функции $E(r)$ вида (22) при учете неоднородности упругих свойств пород приконтурной зоны

Функция ${}_1\Phi_1 = N(\alpha, \beta, \xi)$ может быть представлена с помощью ряда Куммера, сходящегося при всех знаменаниях аргумента:

$${}_1\Phi_1 = N(\alpha, \beta, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j}{(\beta)_j} \cdot \frac{\xi^j}{j!}, \quad (\alpha)_j \equiv \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+j-1) \quad (24)$$

Поскольку величина r всегда положительна, область сходимости решения распространяется на всю действительную ось значений аргумента.

На основании (4), (19), (23) компоненты НДС в упругой немонотонно-неоднородной зоне запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= C_1 r^{nk-s} N_1(r) + C_2 r^{m-nk-1} N_2(r), \\ \sigma_{(\theta)} &= C_1 r^{nk-s} \left(\lambda N_1(r) + \frac{nk-s\lambda}{s} N_3(r) \right) + C_2 r^{m-nk-1} \left(\lambda N_2(r) + \frac{m-nk-s\lambda+s-1}{s} N_4(r) \right), \\ u(r) &= \frac{(1+2\lambda)^{2-s}}{(1+\lambda)^{3-s} E(r)} \left[C_1 r^{nk-s+1} \frac{nk-s\lambda}{s} N_3(r) + C_2 r^{m-nk} \frac{m-nk-s\lambda+s-1}{s} N_4(r) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

где $N_1(r) = N(\alpha, \beta, ar^n)$, $N_2(r) = N(\alpha - \beta, 2 - \beta, ar^n)$,

$$N_3(r) = N(\alpha + 1, \beta, ar^n), \quad N_4(r) = N(\alpha - \beta + 2, 2 - \beta, ar^n)$$

Рассмотрим внешнюю однородную упругую область вокруг цилиндрической выработки с характеристикой $E = E_1 = \text{const}$.

Разрешающее уравнение относительно F для однородной внешней области имеет вид

$$r^2 F'' + (2-s)rF' - sF = 0$$

откуда

$$F = C_3 r^s + C_4 r^{-1} \quad (26)$$

Компоненты НДС согласно (4), (11) примут вид

$$\sigma_{((r))} = C_3 + C_4 r^{-s-1}, \quad \sigma_{((\theta))} = C_3 - \frac{1}{s} C_4 r^{-s-1}, \quad u_{((r))} = -\frac{(1+s\lambda)(1+2\lambda)^{2-s}}{s(1+\lambda)^{3-s} E_1} C_4 r^{-s} \quad (27)$$

Здесь и далее все компоненты НДС в ЗНД обозначены квадратными скобками у индексов, в упругой неоднородной зоне – круглыми скобками у индексов, в упругой однородной зоне – двойными круглыми скобками у индексов.

Теперь рассмотрим ЗНД. Напряженное состояние в ЗНД определяется уравнениями равновесия (5) и условием прочности (2). Применительно к геоматериалам используем условие прочности Кулона-Мора, соответствующее уравнению прямолинейной огибающей кругов Мора. На площадке предельного сдвига оно может быть представлено в виде

$$\max\{\tau_n - (\sigma_n + H)\operatorname{tg}\varphi\} = 0, \quad (28)$$

где σ_n , τ_n - соответственно нормальное и касательное напряжения на произвольной площадке с нормалью n ; H - параметр, характеризующий положение огибающей; φ - угол внутреннего трения (принимается постоянным).

Условие предельного состояния для материала характеризуется тем же уравнением (угол φ сохраняется), но с меньшим параметром H^* ($H^* < H$). Прямым следствием этого является разрывное поведение тангенциальных напряжений σ_θ на границе ЗНД.

Параметр H^* в неоднородном массиве связан с прочностными свойствами материала и с переменным коэффициентом сцепления $K(r)$ следующим образом:

$$K(r) = H^*(r)\operatorname{tg}\varphi = \alpha_2^{-1}\sigma_{\text{пр}}^*(r)\operatorname{tg}\varphi \quad (29)$$

Здесь $\alpha_1 = (1 + \kappa \sin \varphi)/(1 - \kappa \sin \varphi)$, $\alpha_2 = 2\kappa \sin \varphi/(1 - \kappa \sin \varphi)$, $\kappa = \pm 1$.

Условие предельного состояния согласно (29) в случае плоской осевой и центральной симметрии может быть записано одним уравнением

$$\sigma_{[\theta]} - \alpha_1 \sigma_{[r]} = \alpha_2 H^*(r) \quad (30)$$

Разрешающее уравнение для функции напряжений F в ЗНД имеет вид

$$(2s)^{1-s} F' - \alpha_1 r^{-s} F = \alpha_2 H^*(r) \quad (31)$$

решение которого таково

$$F = C_5 r^{s\alpha_1} + s\alpha_2 \operatorname{ctg}\varphi r^{s\alpha_1} \int r^{-s\alpha_2-1} K(r) dr \quad (32)$$

Компоненты напряжений в ЗНД запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{[r]} &= C_5 r^{s\alpha_2} + s\alpha_2 \operatorname{ctg}\varphi r^{s\alpha_2} \int r^{-s\alpha_2-1} K(r) dr, \\ \sigma_{[\theta]} &= C_5 \alpha_1 r^{s\alpha_2} + \alpha_2 \operatorname{ctg}\varphi (s\alpha_1 r^{s\alpha_2} \int r^{-s\alpha_2-1} K(r) dr + K(r)) \end{aligned} \quad (33)$$

Пластическая неоднородность в формулах (30)-(33), выраженная через $K(r)$, также как и неоднородность $E(r)$ является локальной, причем $K(r)$ изменяется в пределах $1 < r \leq r_0$. Если считать пластическую неоднородность следствием первоначальной неоднородности механических свойств породы, то $K(r)$ с точностью до множителей совпадает с распределением $\sigma_{\text{пр}}(r)$. Следовательно, согласно соотношению (6) для неомогенных материалов, $K(r)$ может принимать вид, аналогичный функции $E(r)$.

Отметим, что Алимжановым М. Т. была решена соответствующая упругопластическая задача, учитывающая пластическую неоднородность механических свойств материала [6].

Нахождение деформированного состояния вокруг подземной выработки

Для определения перемещений в ЗНД, помимо выбранной модели неоднородного массива, необходимо иметь дополнительные предположения. Ниже рассматриваются два основных подхода к определению перемещений в ЗНД: а) подход, основанный на ассоциированном законе пластического деформирования; б) подход, предложенный Христиановичем-Шемякиным [7]. Оба подхода обобщены на случай рассматриваемого массива.

Рассмотрим первую модель упругопластического тела (УПТ). Используем ассоциированный закон (3). Пластический потенциал в (3) задается в виде (30):

$$U(\sigma_{ij}) = \sigma_{[\theta]} - \alpha_1 \sigma_{[r]} - \alpha_2 H^*(r) \quad (34)$$

Подставляя (34) в (8), нетрудно убедиться, что скорость диссипации механической энергии при пластическом деформировании в рассматриваемом массиве будет изменяться пропорционально прочностным свойствам $\sigma_{\text{пр}}^*(r)$. Величины $\partial U / \partial \sigma_{[ij]}$ в (3) при нагружении будут изменяться в каждой точке ЗНД, т.к. для неоднородного массива напряженное состояние в ЗНД не является фиксированным. Исключением являются случаи осесимметричного и центрально-симметричного состояний, при которых указанные величины становятся постоянными.

Положим, что нагружение является активным, а деформации – малыми. Тогда из (34) будем иметь

$$\varepsilon_{[r]} + s\alpha_1 \varepsilon_{[\theta]} = \varepsilon_{(r)} + s\alpha_1 \varepsilon_{(\theta)}. \quad (35)$$

Здесь принято, что в ЗНД полные деформации равны сумме упругих и пластических.

Переходя в (35) к перемещениям, получим дифференциальное уравнение, определяющее единственное ненулевое перемещение $u_{[r]}$:

$$\frac{du_{[r]}}{dr} + s\alpha_1 \frac{u_{[r]}}{r} = \varepsilon_{(r)} + s\alpha_1 \varepsilon_{(\theta)} \quad (36)$$

Если пренебречь упругими деформациями в ЗНД, то в уравнении (36) правая часть обратится в нуль. В этом случае дилатансия [8] может оказаться значительной.

Будем считать, что для рассматриваемого тела упругие деформации во всех точках ЗНД одинаковы. Тогда решение уравнения (36) запишется в виде

$$u_{[r]} = \frac{C_6}{r^{s\alpha_1}} + (\varepsilon_{(r)} + s\alpha_1 \varepsilon_{(\theta)}) \frac{r}{s\alpha_1 + 1} \quad (37)$$

Решение (37) может быть выражено через компоненты фиксированных упругих напряжений $\sigma_{(r)}$, $\sigma_{[\theta]}$ на границе r_0 ЗНД:

$$u_{[r]} = \frac{C_6}{r^{s\alpha_1}} + \frac{(1+2\lambda)^{2-s} r}{(s\alpha_1 + 1)(1+\lambda)^{3-s} E(r_0)} \left[((1+\lambda)^{s-1} - s\lambda\alpha_1) \sigma_{(r_0)} + s(\alpha_1 - \lambda) \sigma_{(\theta)} \right] \quad (38)$$

Дальнейшее определение $u_{[r]}$ в (38) будет зависеть от формы выработки и вида неоднородности механических свойств массива.

Рассмотрим массив с цилиндрической выработкой. Пусть неоднородность вокруг выработки описывается немонотонными функциями (22), тогда перемещение $u_{[r]}$ запишется в виде

$$u_{[r]} = \frac{C_6}{r^{\alpha_1}} + \frac{(1+2\lambda)r}{(\alpha_1 + 1)(1+\lambda)^2 E(r_0)} \left[C_1 r_0^{nk-1} \left((1-\lambda^2) N_1(r_0) + (\alpha_1 - \lambda)(nk - \lambda) N_3(r_0) \right) + \right. \\ \left. + C_2 r_0^{m-nk-1} \left((1-\lambda^2) N_2(r_0) + (\alpha_1 - \lambda)(m - nk - \lambda) N_4(r_0) \right) \right] \quad (39)$$

Компоненты упругопластического НДС массива, локально неоднородного вокруг цилиндрической выработки, определяются при $s = 1$ следующей системой выражений: в ЗНД выражениями (33), (39); в неоднородной упругой зоне выражениями (25), в однородной упругой области выражениями (27).

Решая эту систему уравнений с учетом граничных условий (16), (17) и условий сопряжений (18), найдем постоянные $C_1 - C_6$:

$$C_1 = \frac{D_0 S_2 - (1+\lambda) P B_2}{B_1 S_2 - B_2 S_1}, \quad C_2 = \frac{D_0 S_1 - (1+\lambda) P B_1}{B_1 S_2 - B_2 S_1}, \quad C_3 = P, \\ C_4 = r_1^2 \left[\frac{(D_0 S_2 - (1+\lambda) P B_2) B_3 - (D_0 S_1 - (1+\lambda) P B_1) B_4}{B_1 S_2 - B_2 S_1} - P \right], \quad C_5 = P_0, \\ C_6 = r_1^2 \frac{(1+2\lambda) r_0^{\alpha_1+1}}{(1+\lambda)^2 E(r_0)} \left[\frac{(D_0 S_2 - (1+\lambda) P B_2) (B_5 - S_3) - (D_0 S_1 - (1+\lambda) P B_1) (B_6 - S_4)}{B_1 S_2 - B_2 S_1} \right]$$

где

$$B_1 = r_0^{nk-1} N_1(r_0), \quad B_2 = r_0^{m-nk-1} N_2(r_0), \quad B_3 = r_1^{nk-1} N_1(r_1), \quad B_4 = r_1^{m-nk-1} N_2(r_1), \\ B_5 = r_0^{nk-1} (nk - \lambda) N_3(r_0), \quad B_6 = r_0^{m-nk-1} (m - nk - \lambda) N_4(r_0), \\ S_1 = r_1^{nk-1} ((1+\lambda) N_1(r_1) + (nk - \lambda) N_3(r_1)), \quad S_2 = r_1^{m-nk-1} ((1+\lambda) N_2(r_1) + (m - nk - \lambda) N_4(r_1)),$$

$$S_3 = r_o^{nk-1} \left(\frac{1-\lambda^2}{\alpha_1+1} N_1(r_o) + \frac{(\alpha_1-\lambda)(nk-\lambda)}{\alpha_1+1} N_3(r_o) \right), \quad D_o = P_o r_o^{\alpha_2} + \alpha_2 \operatorname{ctg} \varphi r_o^{\alpha_2} \int_1^{r_o} r^{-\alpha_1} K(r) dr,$$

$$S_4 = r_o^{m-nk-1} \left(\frac{1-\lambda^2}{\alpha_1+1} N_2(r_o) + \frac{(\alpha_1-\lambda)(m-nk-\lambda)}{\alpha_1+1} N_4(r_o) \right)$$

Подставляя их в компоненты НДС, можно получить решение в окончательном виде.

Выражение для определения неизвестного радиуса r_o ЗНД находится из условия прочности породы на этой границе:

$$\frac{((\lambda-\alpha_1)B_1+B_5)(D_o S_2-(1+\lambda)PB_2)-((\lambda-\alpha_1)B_2+B_6)(D_o S_1-(1+\lambda)PB_1)}{B_1 S_2-B_2 S_1} = \sigma_s(r_o) \quad (40)$$

Функция $\sigma_{np}(r_o)$ аналогична $K(r)$, но в качестве аргумента выступает величина r_o .

Рассмотрим теперь модель УПТ Христиановича-Шемакина. Система выражений (25), (27), (33), определяющая упругопластическое состояние неоднородного массива, остается в силе. Различие имеет место в деформированном состоянии в ЗНД. Определим перемещение в ЗНД.

При соблюдении условия соосности тензоров напряжений и деформаций первые три положения модели [7] в данной задаче примут вид:

$$\sigma_{[\theta]} - \alpha_1 \sigma_{[r]} = \alpha_2 H^*(r), \quad \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = \frac{E(r)}{1-2\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta),$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E(r_o)}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)$$

Для рассматриваемого массива второе условие (41) в неоднородной упругой зоне соблюдается при $E = E(r)$, а всюду в ЗНД только при одном фиксированном значении $E = E(r_o)$. Используя второе и третье условие (41), найдем дифференциальное уравнение для определения $u_{[r]}$:

$$\frac{du_{[r]}}{dr} + \frac{u_{[r]}}{r} = \frac{C}{1+\alpha_1} \left[C_5 r^{\alpha_2} + \alpha_2 \operatorname{ctg} \varphi r^{\alpha_2} \int_1^{r_o} r^{-\alpha_1} K(r) dr + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \operatorname{ctg} \varphi K(r) \right] \quad (42)$$

решение которого имеет вид

$$u_{[r]} = \frac{C_6}{r} + CC_5 r^{\alpha_1} + \frac{C \operatorname{ctg} \varphi}{r} \left[(\alpha_1^2 - 1) \int_1^{r_o} r^{\alpha_1} dr \int_1^{r_o} r^{-\alpha_1} K(r) dr + \alpha_2 \int_1^{r_o} r K(r) dr \right] \quad (43)$$

где $C = (1+2\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda)^{-2} E^{-1}(r_o)$.

Постоянные $C_1, \dots, C_5$ в данной задаче те же самые, а постоянная C_6 запишется следующим образом:

$$C_6 = \frac{(1+2\lambda)r_o^2}{(1+\lambda)^2 E(r_o)} \left(\left(\frac{(D_o S_2 - (1+\lambda)PB_2)B_5 - (D_o S_1 - (1+\lambda)PB_1)B_6}{B_1 S_2 - B_2 S_1} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{(1+2\lambda)(1-\lambda) \operatorname{ctg} \varphi}{(1+\lambda)^2 E(r_o) r_o} \left(\left(P_o \operatorname{tg} \varphi r_o^{\alpha_1+1} + (\alpha_1^2 - 1) \int_1^{r_o} r^{\alpha_1} dr \int_1^{r_o} r^{-\alpha_1} K(r) dr + \alpha_2 \int_1^{r_o} r K(r) dr \right) \right) \right)$$

Алимжановым М. Т. было получено соответствующее решение для случая однородного упругопластического массива [9].

3. Результаты расчета НДС и прочности пород приконтурной зоны цилиндрической выработки в рассматриваемом горном массиве

Согласно численным результатам наличие локальной неоднородности вокруг выработки существенно влияет на распределение компонент НДС, особенно сказывается оно на распределении тангенциальных напряжений σ_θ . Максимум σ_θ может находиться за пределами ЗНД внутри неоднородной упругой зоны, а не на границе ЗНД, как в однородном массиве. Также установлено, что область дестабилизирующего воздействия неоднородности в массиве намного превосходит

пределы самой зоны неоднородности: напряжения и перемещения стабилизируются на расстоянии, примерно втрое превышающем радиус r_1 этой зоны.

Ниже в таблице 1 приведены численные результаты распределения радиуса ЗНД r_0 и перемещений пород u_r вокруг цилиндрической выработки в неоднородном массиве в зависимости от его показателей φ , σ_s , отсутствия или наличия неоднородности E_1 или $E(r)$ и от рассматриваемой модели УПТ.

Результаты расчетов получены по формулам (39), (40) (модель УПТ на основе ассоциированного закона (АЗП)) и (40), (43) (модель УПТ Христиановича–Шемякина (Х-Ш)). Также показаны результаты расчетов по формулам (39), (40) в случае, когда полные деформации в ЗНД приравнены к пластическим. При расчетах использованы следующие данные: $P = 24,5$ МПа; $P_0 = 0,15$ МПа; $\sigma_s^1 = 24,5$ МПа; $E_1 = 9800$ МПа; $\varphi = 20^\circ$; $\mu = 0,3$.

Таблица 1 – Распределение радиуса ЗНД r_0 и перемещений пород u_r вокруг цилиндрической выработки в зависимости от показателей φ , σ_s , E_1 или $E(r)$ и рассматриваемой модели УПТ

Исходные данные	Модель УПТ	$u_r \cdot 10^2$						
		1,0	1,5	2,0	2,5	r_0	3,0	4,0
$\varphi = 20^\circ$ $E = E_1$ $\sigma_s = 5\sigma_s^*$ $r_0 = 2,532$	Модель АЗП $u_{[r]} = u_r^p$	3,696	1,303	0,803	0,606	0,552	0,446	0,350
	Модель АЗП $u_{[r]} > u_r^p$	0,835	0,613	0,554	0,548	0,552	0,446	0,350
	Модель Х-Ш	1,125	0,771	0,618	0,578	0,552	0,446	0,350
$E = E_1$ $\sigma_s = 6\sigma_s^*$ $r_0 = 2,822$	Модель АЗП $u_{[r]} = u_r^p$	5,145	2,226	1,152	0,758	0,615	0,579	0,434
	Модель АЗП $u_{[r]} > u_r^p$	1,041	0,730	0,634	0,621	0,615	0,579	0,434
	Модель Х-Ш	1,397	0,949	0,745	0,636	0,615	0,579	0,434
$E = E(r)$ $\sigma_s = 5\sigma_s^*$ $r_0 = 2,924$	Модель АЗП $u_{[r]} = u_r^p$	6,121	3,018	1,212	0,848	0,649	0,622	0,466
	Модель АЗП $u_{[r]} > u_r^p$	1,228	0,925	0,786	0,712	0,649	0,622	0,466
	Модель Х-Ш	1,642	1,186	0,963	0,756	0,649	0,622	0,466

В таблице 1 приведены результаты распределения перемещения u_r по радиусу r для однородного массива при различных уровнях прочности в ЗНД: при $\sigma_s = 5\sigma_s^*$ и при $\sigma_s = 6\sigma_s^*$. Как следует из таблицы, снижение уровня прочности в ЗНД приводит к общему росту перемещений вокруг полости. Вблизи границы ЗНД имеется некоторое выравнивание перемещений, так как на примыкающих к границе ЗНД участках еще велика роль упругих деформаций. Приведены результаты распределения перемещения u_r по радиусу r для массива с локальной немонотонной неоднородностью при уровне прочности $\sigma_s = 5\sigma_s^*$ в ЗНД. Радиус зоны неоднородности $r_1 = 4$, $E_1 = 5E_0$. При наличии заданной неоднородности происходит рост перемещений, причем возрастание наиболее существенно вблизи контура выработки.

Как видно из таблицы 1, перемещения u_r на основе модели АЗП несколько меньше перемещений u_r модели Х-Ш. На контуре выработки разница в значениях составляет 25-30%. При меньших углах внутреннего трения φ разница будет больше, в частности, при $\varphi = 5^\circ$ разница будет составлять около 45%. Если в ЗНД полные деформации приравнять к пластическим, то перемещения u_r на основе модели АЗП будут намного больше перемещений u_r в условиях модели Х-Ш. Это связано с тем, что в модели Х-Ш при определении u_r учитывается среднее главное напряжение σ_z . Отметим, что при $r \geq r_0$ (на границе и за пределами ЗНД) величины u_r во всех случаях совпадают. Кроме того, наличие локальной неоднородности вокруг выработки приводит к росту концентрации напряжений пород приконтурной зоны и к увеличению радиуса ЗНД r_0 .

В таблице 2 приведены численные результаты зависимости радиуса ЗНД породы r_0 и перемещений контура цилиндрической выработки $u_{[1]}$ от угла внутреннего трения φ для однородного массива при различных уровнях прочности в ЗНД: при $\sigma_{пр} = 5\sigma_{пр}^*$, при $\sigma_{пр} = 6\sigma_{пр}^*$ и при $\sigma_{пр} = \sigma_{пр}^*$. Остальные исходные данные прежние.

Таблица 2 – Зависимость радиуса ЗНД породы r_0 и перемещений контура цилиндрической выработки $u_{[1]}$ от показателей φ , $\sigma_{\text{пр}}$

Исходные данные	Уровень прочности	Угол внутреннего трения φ породы				
	φ	0	5°	10°	20°	30°
r_0	$\sigma_{\text{пр}} = 5\sigma_{\text{пр}}^*$	11,815	6,445	4,300	2,532	1,816
	$\sigma_{\text{пр}} = 6\sigma_{\text{пр}}^*$	19,361	8,833	5,271	2,822	1,930
	$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{пр}}^*$	1,639	--	--	--	--
$u_{[1]} \cdot 10^2$	$\sigma_{\text{пр}} = 5\sigma_{\text{пр}}^*$	4,667	2,623	1,865	0,835	0,445
	$\sigma_{\text{пр}} = 6\sigma_{\text{пр}}^*$	12,312	4,792	2,594	1,041	0,471
	$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{пр}}^*$	0,217	--	--	--	--

При $\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{пр}}^*$ отмечены значения радиуса r_0 и перемещений контура выработки $u_{[1]}$ для случая идеально-вязкого материала. По данным таблицы 2 можно судить, насколько велико влияние пластического разрыхления [8] на величину перемещений контура выработки $u_{[1]}$ при малых углах φ . С ростом φ это влияние уменьшается и для значений $\varphi > 30^\circ$ будет незначительным. Снижение уровня прочности в ЗНД $\sigma_{\text{пр}}$ также существенно сказывается на величине смещений контура выработки $u_{[1]}$, особенно при малых углах φ , однако при $\varphi = 30^\circ$ разница в уровне прочности становится едва различимой. Т.о., угол внутреннего трения φ породы, также как и уровень прочности в ЗНД, является одним из основных факторов формирования НДС вокруг выработки.

Заключение. Разработана механико-математическая модель неоднородного упругопластически деформируемого горного массива. В рамках этой модели решены упругопластические задачи для круговой цилиндрической и сферической выработки с заданным классом немонотонной неоднородности механических свойств пород. Разработаны методы расчета НДС и прочности пород приконтурной зоны рассмотренной подземной выработки. Показано, что наличие локальной неоднородности в массиве, уровень прочности в ЗНД и угол внутреннего трения φ оказывают значительное влияние на компоненты НДС, в том числе на радиус ЗНД r_0 и распределение перемещений u_r вокруг выработки. Вместе с тем величина u_r будет существенно зависеть еще и от выбранной модели УПТ.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Байконуров О.А., Ерофеев Н.П. К вопросу о взаимосвязи между прочностными и упругими свойствами джезказганских пород. – Алма-Ата, 1976. – 137 с.
- 2 Борисовец В.А. Неоднородности волнового характера в породах вблизи выработок, сооружаемых буровзрывным способом // Шахтное строительство. – 1972. – № 9. – С. 7-11.
- 3 Глушко В.Т., Виноградов В.В. Разрушение горных пород и прогнозирование проявлений горного давления. – М.: Недра, 1982. 192 с.
- 4 Савич А.И. Упругие свойства пород в массиве вблизи горных выработок // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1965. – № 11. – С. 20-34.
- 5 Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М., 1980. – 608 с.
- 6 Алимжанов М.Т. Упругопластическая задача, учитывающая неоднородность механических свойств материала // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 242, № 6. – С. 1281-1284.
- 7 Христианович С.А., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. Механика твердого тела (МГТ). – 1967. – № 4. – С. 86-97.
- 8 Новожиллов В.В. О пластическом разрыхлении // Прикл. математика и механика (ПММ). – 1965. – 29, № 4. – С. 681-689.
- 9 Алимжанов М.Т. О напряженно-деформированном состоянии горного массива вокруг одиночной выработки // Физико-технич. пробл. разр. полезн. ископаемых (ФТПРПИ). – 1972. – № 4. – С. 118-121.

REFERENCES

- 1 Baikonurov O.A., Erofeev N.P. K voprosu o vzaimosvyazi mezhdru prochnostnymi i uprugimi svoistvami dzhezkazganskikh porod. Alma-Ata, 1976. 137 s.
- 2 Borisovets V.A. Neodnorodnosti volnovogo haraktera v porodah vblizi vyrobotok, sooruzhaemyh burovzryvnym sposobom. Shahtnoe stroitel'stvo. 1972. N 9. S. 7-11.
- 3 Glushko V.T., Vinogradov V.V. Razrushenie gornyh porod i prognozirovaniye proyavleniy gornogo davleniya. M.: Nedra, 1982. 192 s.

- 4 Savich A.I. Uprugie svoistva porod v massive vblizi gornyh vyrabotok. Izv. AN SSSR. Fizika Zemli. 1965. N 11. S. 20-34.
- 5 Luk Yu. Special'nye matematicheskie funkicii i ih approksimacii. M., 1980. 608 s.
- 6 Alimzhanov M.T. Uprugoplasticheskaya zadacha, uchityvayushchaya neodnorodnost' mekhanicheskikh svoistv materiala. Doklady AN SSSR. 1978. T. 242, № 6. S. 1281-1284.
- 7 Hristianovich S.A., Shemyakin E.I. K teorii ideal'noy plastichnosti. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela (MTT). 1967. N 4. S. 86-97.
- 8 Novozhilov V.V. O plasticheskom razryhlenii. Prikl. matematika i mehanika (PMM). 1965. 29. N 4. S. 681-689.
- 9 Alimzhanov M.T. O napryazhenno-deformirovannom sostoyanii gornogo massiva vokrug odinochnoy vyrabotki. Fiziko-tehnich. probl. razr. polezn. iskopaemyh. 1972. N 4. S. 118-121.

Резюме

А. М. Әлімжанов

(Ө. А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, Алматы, Қазақстан)

ЖЕРАСТЫ ҚАЗБАНЫҢ КОНТУР МАҢЫ АУМАҒЫНЫҢ КДК МЕН БЕРІКТІГІН ЕСЕПТЕУ ҮШІН ЖАСАЛҒАН БІРТЕКТІ ЕМЕС СЕРПІМДІ-СОЗЫЛЫМДЫҚ ДЕФОРМАЦИЯЛАНАТЫН КЕН ЖЫНЫСТАРЫ ҚАТПАРЛАРЫНЫҢ ҮЛГІСІ

Жұмыста жыныстың механикалық (беріктік және деформациялық) сипаттамалары координаттар мен жүктелу параметрлерінің үздіксіз және дифференциалданатын функциялары болатын, ал қатпардың физикалық қасиеттері кернеу-деформация диаграммасында екі бөлікті қисықпен (көлбеу және көлденең бөліктері сызықтық серпімді және мүлтіксіз созылымдық күйлерге сәйкес болатын) сипатталатын және жүктелу үрдісінде өз күйін тікке жақын өзгертетін біртекті емес серпімді-созылымдық деформацияланатын кен жыныстары қатпарларының үлгісі ұсынылған. Осы үлгі негізінде жұмыста дөңгелек цилиндрлі қазбаның жазық өстік симметриялы есебі және сфералы қазбаның орталық симметриялы есебі жыныстардың механикалық қасиеттері біртекті монотонды емес берілген кластарында шешілген. Жерасты қазба қатпарындағы контур маңы аумағындағы жыныстарының кернеулі-деформациялық күйі (КДК) мен беріктігін есептеу әдістері жасалған.

Тірек сөздер: біртекті емес кен жыныстары қатпары, цилиндр қазба, сфералық қазба, серпімді-созылымдық есеп, кернеулі-деформациялық күй (КДК), беріктік.

Summary

A. M. Alimzhanov

(Mechanics and Engineering Institute named Academician U. A. Dzholdasbekova, Almaty, Kazakhstan)

MODEL OF THE INHOMOGENEOUS ELASTIC-PLASTIC DEFORMABLE ROCK MASSIF FOR ANALYSIS SSS AND STRENGTH AROUND UNDERGROUND WORKING

Model of the inhomogeneous elastic-plastic deformable rock massif was considered in the paper. The given model contains next basic statements: mechanical (durable and deformable) rock characteristics are continuous and differentiable functions of coordinates and loading parameters; massif physical properties are described by the two-link broken line on the strength-deformation diagram (inclined and horizontal links are corresponded with linearly-elastic and ideally-plastic states) and this broken line is nearly vertically varied during loading. On the basis of elaborated model the plane axissymmetric problem for round cylindrical working and centersymmetric problem for spherical working with the given class of non-monotonous inhomogeneity of mechanical rock characteristics were solved. Methods for analysis rock stress-strain state (SSS) and rock strength around underground working in considered rock massif were worked.

Keywords: inhomogeneous rock massif, cylindrical working, spherical working, elastic-plastic problem, stress-strain state (SSS), rock strength.

Поступила 28.01.2014 г.