А. АСАНОВ, Ж. О. ТОЛУБАЕВ

(Кыргызско-Туреций университет «Манас», Бишкек, Кыргызстан,

СГЭИ БатГУ, Сулюкта, Кыргызстан

e-mail:avyt.asanov @ mail. ru, tolubaiev69@mail.ru)

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА К ПРОСТРАНСТВУ $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$

Аннотация. В этой работе на основе понятия производной по возрастающей функции и методом неотрицательных квадратичных форм установлены достаточные условия принадлежности решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса второго рода в пространстве $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$.

Ключевые слова: производная по возрастающей функции, непрерывная матричная функция, вектор-функция, пространство $n\times n$-мерных непрерывных матричных функций.

Тірек сөздер: үдеуші функцияның туындысы, үздіксіз матрицалық функция, вектор-функция, $n\times n$-өлшемді үздіксіз матрицалық функция.

Keywords: derivative with respect to an increasing function, the continuous matrix function, the vector func-tion, dimensional space of continuous matrix functions.

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений типа Вольтерра-Стильтьеса

$$x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau)=f(t),\ \ t\ge t_0. \tag{1}$$

где интеграл является интегралом Стильтьеса, $K(t,\tau)-n\times n$ мерная симметричная непрерывная матричная функция, т.е. $K^T(t,\tau)=K(t,\tau)$, $G=\{(t,\tau)\in R^2: t_0\le\tau\le t<\infty\}$, $f(x)-$ заданная непрерывная n-мерная векторная функция, $g(t)$ – заданная строго возрастающая непрерывная функция на $[t_0,\infty)$, $x(t)$ – искомая n-мерная векторная функция.

Вопросы единственности, ограниченности и принадлежности решения к пространству квадратично-суммируемых вектор-функций для систем линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра методом преобразований уравнений исследованы в работах [1-2, 4-8].

Здесь методом неотрицательных квадратичных форм установлены достаточные условия принадлежности решений систем уравнений (1) в пространстве $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$.

Введем обозначения: $C_n[t;\infty)$ – пространство *n*-мерных непрерывных вектор функций с эле-ментами из $C[a,b]$ и $C_{nn}(G)$ – пространство $n\times n-$мерных матричных функций с элементами из $C(G)$.

Для любых $x=(x_1,x_2,...,x_n),\ y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$ определим скалярные произведения $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$ норма $K(t,\tau)-n\times n$ мерной симметричной матричной функции определяется следующим равенством $\|K(t,\tau)\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|K_{ij}(t,\tau)|,$ а норма *n*-мерных векторных функций $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ определяется следующим равенством $\|x(t)\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|.$ Через $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$ обозначим пространство всех n-мерных вектор-функций $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$, удовлетворяющих условию

$$\int_{t_0}^{\infty}\|x(t)\|^2dg(t)<\infty. \qquad (2)$$

Ниже приведем определение и теорему из [3], которые будем использовать в данной работе. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале (a,b). Будем предполагать, что функция $g(x)$ – строго возрастающая непрерывная функция на интервале (a,b). Возьмем точку $x\in(a,b)$. Зададим x приращение $\Delta(x)\neq 0$, тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ получат приращения $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ и $\Delta g(x)=g(x+\Delta x)-g(x)$

Определение. Производной по $g(x)$ функции $f(x)$ в точке $x\in(a,b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению функции $\Delta g(x)$ при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует):

$$f'_{g(x)}(x)=\frac{df(x)}{dg(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{g(x+\Delta x)-g(x)}$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f(x)$ – непрерывная функция на сегменте $[a;b]$ и

$$F(x)=\int_{a}^{x}f(t)dg(t),\ \ x\in[a;b],$$

тогда

$$F'_{g(x)}(x)=\left(\int_a^x f(t)dg(t)\right)'_{g(x)}=f(x),\quad x\in[a;b],$$

где

$$F'_{g(x)}(a)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{g(a+\Delta x)-g(a)},\quad F'_{g(x)}(b)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{F(b+\Delta x)-F(b)}{g(b+\Delta x)-g(b)}.$$

Доказательство. По определению производной по $g(x)$ имеем

$$F'_{g(x)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\int_x^{x+\Delta x}dg(t)-\int_x^{x+\Delta x}(f(x)-f(t))dg(t)\right)/[g(x+\Delta x)-g(x)]=f(x)-\lim_{\Delta x\to 0}\psi(x,\Delta x),$$

где

$$\psi(x,\Delta x)=\left(\int_x^{x+\Delta x}(f(x)-f(t))dg(t)\right)/[g(x+\Delta x)-g(x)].$$

Отсюда, учитывая, что $g(x)$ – возрастающая функция на $[a;b]$, получим

$$|\psi(x,\Delta x)|\le\left[\omega_{f(x)}(\Delta x)\left(\int_x^{x+\Delta x}dg(t)\right)\right]/[g(x+\Delta x)-g(x)]=\omega_{f(x)}(\Delta x),$$

где $\omega_{f(t)}(|\Delta x|)$ – модуль непрерывности функции $f(x)$, т.е.

$$\omega_{f(x)}(\delta)=\sup_{|t-x|\le\delta}|f(x)-f(t)|.$$

Известно, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_{f(x)}(\delta)=0.$ Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}|\psi(x,\Delta x)|\le\lim_{\Delta x\to 0}\omega_{f(x)}(|\Delta x|)=0.$$

Аналогично доказываются другие случаи.

Следовательно, $F'_{g(x)}(x)=f(x)$. Теорема 1 доказана.

ЗАДАЧА. В данной работе рассматриваются и исследуются методом преобразований уравне-ний, достаточные условия принадлежности к пространству $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$ решения систем линейного интегрального уравнения (1) типа Вольтерра-Стильтьеса.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для систем линейного интегрального уравнения (1) выполняются следую-щие условия:

1) $\|K'_{g(t)}(t,s)\|,\ \|K'_{g(s)}(t,s)\|,\ \|K''_{g(t)g(s)}(t,s)\|\in C(G),$

где $K'_{g(t)}(t,s)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{K(t+\Delta t)-K(t,s)}{g(t+\Delta t)-g(t)}, \quad K'_{g(s)}(t,s)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{K(t,s+\Delta s)-K(t,s)}{g(s+\Delta s)-g(s)}$;

2) для любого $u=(u_1,u_2,...,u_n)\in R^n$ справедливы следующие неравенства:

$a)$ $\langle K(t,t_0)u,u\rangle\ge 0$ и $\langle K'_{g(t)}(t,t_0)u,u\rangle\le 0$ при $t\in[t_0,\infty)$;

$b)$ $\langle K'_{g(\tau)}(t,\tau)u,u\rangle\ge 0$ и $\langle K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau)u,u\rangle\le 0$ при $(t,\tau)\in G$

Тогда для любого $x(t)\in L^2_{n,g}[t_0,\infty)$ справедливо

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)x(\tau),x(s)\rangle dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\rangle-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\langle K_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\rangle dg(s)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\langle K'_{g(\tau)}(t,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle dg(\tau)-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle dg(\tau)dg(s), \qquad (3)$$

где

$$z(s,\tau)=\int\limits_{\tau}^{s}x(\tau)dg(\tau). \qquad (4)$$

Доказательство. В силу теоремы 1 из (5) имеем

$$z'_{g(\tau)}(s,\tau)=-x(\tau), \quad (5)$$

и

$$z'_{g(s)}(s,\tau)=x(s). \quad (6)$$

Для упрощения двойного интеграла в уравнении (3), применяем следующие равенства и формулы нахождения производных скалярного произведения функций $\langle u(t),v(t)\rangle'=\langle u'(t),v(t)\rangle+\langle u(t),v'(t)\rangle$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\langle K(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\rangle=\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\rangle+\langle K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau),x(s)\rangle, \quad (s,\tau)\in G,$$

где $z(s,\tau)$ определяется по формуле (4).

Из последнего равенства следует, что

$$\langle K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau),x(s)\rangle=\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\langle K(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\rangle-\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\rangle. \qquad (7)$$

Далее, учитывая $K^T(t,\tau)=K(t,\tau)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial g(s)}\langle K(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial g(s)}[K(s,\tau)z(s,\tau)],z(s,\tau)\right\rangle+\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau),\frac{\partial}{\partial g(s)}z(s,\tau)\right\rangle=$$

$$=\left\langle K'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle+\left\langle K(s,\tau)z'_{g(s)}(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle+\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau),z'_{g(s)}(s,\tau)\right\rangle=$$

$$=\left\langle K'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle+2\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau),z'_{g(s)}(s,\tau)\right\rangle,$$

Отсюда, получим

$$\left\langle K(s,\tau)z(s,\tau),z'_{g(s)}(s,\tau)\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g(s)}\langle K(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\rangle-\frac{1}{2}\left\langle K'_{g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle,(s,t)\in G \quad (8)$$

Интегрируя (7) по $\tau\in(t_0,s)$, получим

$$\int_{t_0}^{s}\left\langle K(s,\tau)z'_{g(\tau)}(s,\tau),x(s)\right\rangle dg(\tau)=\int_{t_0}^{s}\frac{\partial}{\partial g(\tau)}\langle K(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\rangle dg(\tau)-\int_{t_0}^{s}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\right\rangle dg(\tau)=$$

$$=\langle K(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\rangle\Big|_{t_0}^{s}-\int_{t_0}^{s}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\right\rangle dg(\tau)=-\langle K(s,t_0)z(s,t_0),x(s)\rangle-$$

$$-\int_{t_0}^{s}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\right\rangle dg(\tau),\quad s\in[t_0,\infty).$$

В силу (5), из последного равенства следует, что

$$\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)x(\tau),x(s)\rangle dg(\tau)=\langle K(s,t_0)z(s,t_0),x(s)\rangle+\int_{t_0}^{s}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\right\rangle dg(\tau),\quad s\in[t_0,\infty)$$

Отсюда, интегрируя последнее равенство от t_0 до t, получим

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)x(\tau),x(s)\rangle dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\langle K(s,t_0)z(s,t_0),x(s)\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),x(s)\right\rangle dg(\tau)dg(s) \quad (9)$$

Применяя формулы (6), (8) и обобщенную формулу Дирихле [3] к двойному интегралу в (9) и метод интегрирования по частям, имеем

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\langle K(s,\tau)x(\tau),x(s)\rangle dg(\tau)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\left\langle K(s,t_0)z(s,t_0),z'_{g(s)}(s,t_0)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z'_{g(s)}(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}\langle K(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\rangle dg(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\right\rangle dg(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z'_{g(s)}(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\right\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{d}{dg(s)}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\right\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{\tau}^{t}\frac{d}{dg(s)}\left\langle K'_{g(\tau)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(s)dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\langle K(t,t_0)z(t,t_0),z(t,t_0)\right\rangle-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(s)}(s,t_0)z(s,t_0),z(s,t_0)\right\rangle dg(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left\langle K'_{g(\tau)}(t,\tau)z(t,\tau),z(t,\tau)\right\rangle dg(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\left\langle K''_{g(\tau)g(s)}(s,\tau)z(s,\tau),z(s,\tau)\right\rangle dg(\tau)dg(s)$$

Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия теоремы 2 и $f(t)\in L^2{}_{n,g}[t_{0,}\infty)$, то система линейных интегральных уравнений (1) имеет единственное решение

$x(t)$ в пространстве $L^2{}_{n,g}[t_{0,}\infty)$ и справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{\infty}\|x(t)\|^2dg(t)\le\int_{t_0}^{\infty}\|f(t)\|^2dg(t)$$

Доказательство. Из теоремы 2 имеем

$$\int_{t_0}^{\infty}\|x(s)\|^2dg(s)\le\int_{t_0}^{\infty}\left|\left\langle f(s),x(s)\right\rangle\right|dg(s),$$

Применяя неравенства Коши-Буняковского для интегралов к последнему интегралу в правой части неравенства, получим

$$\left(\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|^2\,dg(s)\right)\le\left(\int_{t_0}^{t}\|f(s)\|^2dg(s)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|^2\,dg(s)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда имеем $\int_{t_0}^{\infty}\|x(t)\|^2dg(t)\le\int_{t_0}^{\infty}\|f(t)\|^2dg(t)$. Теорема 3 доказана.

Пример. Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений типа Вольтерра-Стильтьеса (1) при $n=2,\ t_0=0,\ \ g(t)=\sqrt{t}\ \ u\ \ K(t,s)=\begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}\sqrt{s}}{\sqrt{t}+1}+\beta_{11} & \frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{\sqrt{t}+1}+\beta_{12} \\ \frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{\sqrt{t}+1}+\beta_{12} & \frac{\alpha_{22}\sqrt{s}}{\sqrt{t}+1}+\beta_{22} \end{pmatrix}$, т.е.

$$x(t)+\int_0^t \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}\sqrt{s}}{\sqrt{t}+1}+\beta_{11} & \frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{\sqrt{t}+1}+\beta_{12} \\ \frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{\sqrt{t}+1}+\beta_{12} & \frac{\alpha_{22}\sqrt{s}}{\sqrt{t}+1}+\beta_{22} \end{pmatrix} x(s)dg(s)=f(t),\quad t\ge t_0 \qquad (10)$$

где $\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{22},\beta_{11},\beta_{12},\beta_{22}$ – произвольные постоянные, $\alpha_{12}=\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\ ,\alpha_{11}\ge 0,\alpha_{22}\ge 0,$ $\beta_{12}=\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}\ ,\quad \beta_{11}\ge 0,\beta_{22}\ge 0$. Тогда выполняются все условие теоремы 3. Поэтому решение данной системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра-Стильтьеса (10) принадлежит пространству $L^2{}_{n,g}[t_{0,}\infty)$.

Проверим выполнение условий теоремы:

$$K(t,0)=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix},\qquad K'_{g(t)}(t,s)=\begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{11}\sqrt{s}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} & -\frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} \\ -\frac{\alpha_{12}\sqrt{s}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} & -\frac{\alpha_{22}\sqrt{s}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} \end{pmatrix},\ K'_{g(t)}(t,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K'_{g(s)}(t,s)=\begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{t}+1} & \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t}+1} \\ \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t}+1_{12}} & \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{t}+1} \end{pmatrix},K''_{g(t)g(s)}(t,s)=\begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{11}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} & -\frac{\alpha_{12}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} \\ -\frac{\alpha_{12}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} & -\frac{\alpha_{22}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} \end{pmatrix}$$

1. $\left\|K'_{g(t)}(t,s)\right\|,\left\|K'_{g(s)}(t,s)\right\|,\left\|K''_{g(t)g(s)}(t,\tau)\right\|\in C(G).$

2. *Äëÿ ëþáîãî* $u=(u_1,u_2)\in R^2$:

$a)$ $\langle K(t,0)u,u\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},x(t)\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} \beta_{11}u_1+\beta_{12}u_2 \\ \beta_{12}u_1+\beta_{22}u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right\rangle=\beta_{11}u_1{}^2+$

$+\beta_{12}u_1u_2+\beta_{12}u_1u_2+\beta_{22}u_2{}^2=\left(\sqrt{\beta_{11}}u_1+\sqrt{\beta_{22}}u_2\right)^2\ge 0,$ *ïðè* $\beta_{12}=\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\langle K(t,0)u,u\rangle\ge 0$ *ïðè* $t\in[t_0,\infty);$

$$\left\langle K'_{g(t)}(t,0)u,u\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},u\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right\rangle=0=0\Rightarrow\left\langle K'_{g(t)}(t,0)u,u\right\rangle=0$$

ïðè $t\in[t_0,\infty);$

$$b)\ \left\langle K'_{g(s)}(t,s)u,u\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{t}+1} & \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t}+1} \\ \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t}+1} & \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{t}+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, u \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{t}+1}u_1 + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t}+1}u_2 \\ \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t}+1}u_1 + \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{t}+1}u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{t}+1}u_1^{\,2} + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t}+1}u_1u_2 + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{t}+1}u_1u_2 + \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{t}+1}u_2^{\,2} = \frac{1}{\sqrt{t}+1}\left(\alpha_{11}u_1^{\,2} + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{22}u_2^{\,2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}+1}\left(\sqrt{\alpha_{11}}u_1 + \sqrt{\alpha_{22}}u_2\right)^2 \geq 0, ïðè \quad \alpha_{12} = \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}} \Rightarrow \left\langle K'_{g(s)}(t,s)u,u\right\rangle \geq 0 \quad ïðè \quad t \in [t_0, \infty);$$

$$\left\langle K''_{g(t)g(s)}(t,s)u,u\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{11}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} - \frac{\alpha_{12}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} \\ -\frac{\alpha_{12}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} - \frac{\alpha_{22}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, u \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{11}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}u_1 - \frac{\alpha_{12}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}u_2 \\ -\frac{\alpha_{12}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}u_1 - \frac{\alpha_{22}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{\alpha_{11}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}u_1^{\,2} - \frac{\alpha_{12}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}u_1u_2 - \frac{\alpha_{12}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}u_1u_2 -$$

$$-\frac{\alpha_{22}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}u_2^{\,2} = -\frac{1}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}\left(\alpha_{11}u_1^{\,2} + 2\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{22}u_2^{\,2}\right) = -\frac{1}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}\left(\sqrt{\alpha_{11}}u_1 + \sqrt{\alpha_{22}}u_2\right)^2 \geq 0,$$

$$ïðè \quad \alpha_{12} = \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}} \Rightarrow \left\langle K''_{g(t)g(s)}(t,s)u,u\right\rangle \geq 0 \ ïðè \quad t \in [t_0, \infty);$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Ведь Ю.А., Искандаров С. Об единственности решения системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода на полуоси // Известие АН Киргизской ССР. – Вып. № 5. – Фрунзе: Илим, 1986. – С.14-18.

2 Асанов А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на полуоси // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии.− Фрунзе: Илим, 1985. − Вып.18. − С.17-20.

3 Асанов А. Производная функции по возрастающей функции. // Табигый илимдер журналы. Кыргызско-турецкий университети Манаса. – Бишкек, 2001. – С. 18-64.

4 Искандаров С. Об одном признаке ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Известие АН Киргизской ССР. – Вып. №3. – Фрунзе: Илим, 1978. – С. 30-33.

5 Искандаров С. Об ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра, неразрешенных относительно производной. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. − Фрунзе: Илим, 1980. − Вып. 13. − С. 185-192.

6 Винокуров В.Р. Асимптотические поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтера // Дифференциальные уравнения. − 1967. − Т. 3, № 10. – С. 1732-1744.

7 Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений // Математический анализ. − Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. − С. 103-107.

8 Цалюк З.Б., Шамсутдинов М.М. Об ограниченности решений одного класса нелинейных уравнений Вольтера // Математический анализ. − Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1971.− С. 63-71.

9 Асанов А. Система интегральных уравнений Вольтера-Стильтьеса // Табигый илимдер журналы Кыргызско-турец-кий университет «Манаса». – Бишкек, 2003. – С. 65-78.

REFERENCES

1 Ved' Ju.A., Iskandarov S. Ob edinstvennosti reshenija sistemy linejnyh integral'nyh uravnenij tipa Vol'terra pervogo roda na poluosi. Izvestie AN Kirgizskoj SSR, Vup №5, Frunze, Ilim, 1986. P.14-18. (in Russ.)

2 Asanov A. Ob odnom klasse sistem linejnyh integral'nyh uravnenij Vol'terra pervogo roda na poluosi. Issledovanija po integro-differencial'nym uravnenijam v Kirgizii. Frunze, Ilim, 1985. Vyp.18. P.17-20. (in Russ.)

3 Asanov A. Proizvodnaja funkcii po vozrastajushhej funkcii.Tabigyj ilimder zhurnaly. Kyrgyzsko–tureckij universiteti Manasa - Bishkek, 2001. P.18-64. (in Russ.)

4 Iskandarov S. Ob odnom priznake ogranichennosti reshenij linejnyh integro-differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka tipa Vol'terra. Izvestie AN Kirgizskoj SSR, Vup №3, Frunze: Ilim, 1978. P.30-33. (in Russ.)

5 Iskandarov S. Ob ogranichennosti reshenij linejnyh integro-differencial'nyh uravnenij pervogo porjadka tipa Vol'terra, nerazreshennyh otnositel'no proizvodnoj. Issledovanija po integro-differencial'nym uravnenijam v Kirgizii. Frunze, Ilim, 1980. Vyp.13. P.185-192. (in Russ.)

6 Vinokurov V.R. Asimptoticheskie povedenie reshenij odnogo klassa integro-differencial'nyh uravnenij Vol'terra. Differencial'nye uravnenija.Tom 3 №10, 1967. P.1732-1744. (in Russ.)

7 Caljuk Z.B. Zamechanie po povodu metoda Ljapunova dlja integro-differencial'nyh uravnenij. Matematicheskij analiz. Kazan', Izdatel'stvo Kazanskogo un-ta, 1978. P.103-107. (in Russ.)

8 Caljuk Z.B., Shamsutdinov M.M. Ob ogranichennosti reshenij odnogo klassa nelinejnyh uravnenij Vol'tera. Matematicheskij analiz. Kazan', Izdatel'stvo Kazanskogo un-ta, 1971. P.63-71. (in Russ.)

9 Asanov A. Sistema integral'nyh uravnenij Vol'tera-Stil't'esa.Tabigyj ilimder zhurnaly Kyrgyzsko–tureckij universitet «Manasa», Bishkek: 2003. P.65-78. (in Russ.)

Резюме

А. Асанов, Ж. О. Толубаев

(«Манас» атындағы Қырғыз-Түрік университеті, Бішкек, Кырғызстан)

ВОЛЬТЕРР-СТИЛЬТЬЕС СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДЫ ТЕҢДЕУІ

ЖҮЙЕСІ ШЕШІМІНІҢ $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$ КЕҢІСТІГІНЕ ҚАТЫСТЫҒЫ

Бұл жұмыста үдеуші функцияның туындысы және теріс емес квадратты пішіннің әдісімен 2-ші ретті Вольтерр-Стильтьес сызықты интегралды теңдеуі жүйесі шешімінің $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$ кеңістігіне қатысты түсінігі негізінде шарттар қойылды.

Тірек сөздер: үдеуші функцияның туындысы, үздіксіз матрицалық функция, вектор-функция, $n\times n$-өл-шемді үздіксіз матрицалық функция.

Summary

A. Asanov, J. O. Tolubaev

("Manas" Kyrgyz-Turkish university, Bishkek, Kyrgyzstan)

ABOUT BELONGING SOLVING SYSTEMS OF LINEAR VOLITERRA-STILITIESA

INTEGRAL EQUATIONS TO THE SPACE $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$

In this work on base of the notion derived on increasing functions and method неотрицательных square-law forms are installed sufficient conditions accesories decisions of the systems of the linear integral equations Voliterra-Stilitiesa second sort in space $L^2_{n,g}[t_0,\infty)$.

Keywords: derivative with respect to an increasing function, the continuous matrix function, the vector function, dimensional space of continuous matrix functions.

Поступила 15.10.2013г.