УДК 517.956, 517.957

А. Т. АСАНОВА

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Методом введения функциональных параметров исследуется периодическая краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. Установлены достаточные условия существования единственного классического решения рассматриваемой задачи в терминах исходных данных, и предложен алгоритм нахождения этого решения.

На $\overline{\Omega} = \{(t,x): 0 \le t \le T, 0 \le x \le \omega\}$ рассматривается периодическая краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x) +$$

$$+ \int_0^x\int_0^T \left[K_1(t,x,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi} + K_2(t,x,\tau,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial s} + K_3(t,x,s,\xi)u(s,\xi)\right] ds d\xi \,, \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t)\,,\ t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(0,x) = u(T,x)\,,\ x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $u = colon(u_1, u_2, ..., u_n)$, $(n \times n)$ – матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, n – вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$, $(n \times n)$ – матрицы $K_i(t,x,\tau,\xi)$ непрерывны на $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, $i = 1,2,3$, n – вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и $\psi(0) = \psi(T)$.

Функция $u(t,x) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x) \in \overline{\Omega}$ и граничным условиям (2), (3).

Рассматриваются вопросы существования, единственности и нахождения классического решения задачи (1)–(3). Достаточные условия существования периодических по t с периодом T решений систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными (1) с импульсным воздействием установлены численно-аналитическим методом в работе [1]. Для исследования и решения краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений со смешанной производной (1) без интегрального слагаемого было предложено обобщение метода параметризации [2, 3], разработанного для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, на уравнения в частных производных – метод введения функциональных параметров [4, 5]. Были получены достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных и предложены алгоритмы нахождения классического решения. На основе эквивалентности корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений и корректной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости в терминах исходных данных рассматриваемой задачи [6–8]. Краевая задача с данными на характеристиках для систем интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа в случае, когда интегральный слагаемый содержит только интеграл по переменной t исследован в [9, 10] методом введения функциональных параметров. Также были установлены достаточные, необходимые и достаточные условия однозначной и корректной разрешимости исследуемой задачи.

В настоящей работе метод введения функциональных параметров развивается на системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа (1). Получены коэффициентные условия существования единственного классического решения периодической краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа в терминах исходных данных и предложен алгоритм его нахождения.

Схема метода. Возьмем число N, $N = 1,2,\ldots$, и разобьем область $\overline{\Omega}$ на N частей: $[0,T]\times[0,\omega] = [0,h)\times[0,\omega] \bigcup [h,2h)\times[0,\omega] \ldots \bigcup [(N-1)h, Nh]\times[0,\omega]$, $h = T/N$.

Через $u_r(t,x)$ обозначим сужение функции на Ω_r, где $\Omega_r = [(r-1)h, rh)\times[0,\omega]$, $r = \overline{1, N-1}$, $\Omega_N = [(N-1)h, T]\times[0,\omega]$. Вводятся функциональные параметры $\lambda_r(x)$ как значения функции $u_r(t,x)$ на линиях $t = (r-1)/h$: $\lambda_r(x) = u_r((r-1)h, x)$. С помощью замены $u_r(t,x) = \widetilde{u}_r(t,x) + \lambda_r(x)$, $r = \overline{1,N}$, задача (4)–(6) переходит к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}_r}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial x} + A(t,x)\lambda_r'(x) + B(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial t} + C(t,x)\widetilde{u}_r + C(t,x)\lambda_r(x) + f(t,x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_0^x \int_{(i-1)h}^{ih} \left[K_1(t,x,s,\xi)\frac{\partial \widetilde{u}_i(s,\xi)}{\partial \xi} + K_2(t,x,s,\xi)\frac{\partial \widetilde{u}_i(s,\xi)}{\partial s} + K_3(t,x,s,\xi)\widetilde{u}_i(s,\xi) + \right.$$

$$\left. + K_1(t,x,s,\xi)\lambda_i'(\xi) + K_3(t,x,s,\xi)\lambda_i(\xi) \right] ds d\xi, \ (t,x) \in \Omega_r, \ r = \overline{1,N}, \tag{4}$$

$$\widetilde{u}_r((r-1)h,x)=0\,,\quad r=\overline{1,N}\,,\quad x\in[0,\omega]\,, \tag{5}$$

$$\widetilde{u}_r(t,0)=\psi(t)-\psi((r-1)h)\,,\ t\in[(r-1)h,rh),\ \ r=\overline{1,N-1}\,,\ t\in[(N-1)h,T], \tag{6}$$

$$\lambda_1(x)=\widetilde{u}_N(T,x)+\lambda_N(x)\,,\ \ x\in[0,\omega]\,, \tag{7}$$

$$\lambda'_p(x)+\lim_{t\to ph-0}\frac{\partial\widetilde{u}_p(t,x)}{\partial x}=\lambda'_{p+1}(x)\,,\ \ p=\overline{1,N-1}\,,\ \ x\in[0,\omega]\,, \tag{8}$$

где (8) являются условиями склеивания (непрерывности) производной по x функции $u(t,x)$ – решения задачи (1)–(3) на внутренних линиях разбиения. Из склеивания (непрерывности) производной по x решения на внутренних линиях вытекает склеивание (непрерывность) производной t решения, самого решения и смешанной производной по x, t решения. Задачи (1)–(3) и (4)–(8) эквивалентны в следующем смысле. Если функция $u^*(t,x)$ является решением задачи (1)–(3), то система пар $\{\lambda^*_r(x),\widetilde{u}^*_r(t,x)\}$, где $\lambda^*_r(x)=u^*((r-1)h,x)$, $\widetilde{u}^*_r(t,x)=u^*(t,x)-u^*((r-1)h,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (4)–(8). И наоборот, если система пар $\{\lambda^{**}_r(x),\widetilde{u}^{**}_r(t,x)\}$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, является решением задачи (4)–(8), то функция $u^{**}(t,x)$, определяемая равенствами $u^{**}(t,x)=\lambda^{**}_r(x)+\lim\limits_{t\to rh-0}\widetilde{u}^{**}_r(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (1)–(3).

Введем обозначения $\widetilde{v}_r(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}_r(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial t}$, тогда из условий (5), (6) вытекает $\widetilde{v}_r((r-1)h,x)=0$, $\widetilde{w}_r(t,0)=\dot{\psi}(t)$. При фиксированных $\lambda_r(x)$ задача (4)–(6) является задачей Гурса для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа на Ω_r, $r=\overline{1,N}$ и она эквивалентна системе трех интегральных уравнений

$$\widetilde{v}_r(t,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}\Big[A(s,x)\lambda'_r(x)+C(s,x)\lambda_r(x)\Big]ds+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\Big[A(s,x)\widetilde{v}_r(s,x)+B(s,x)\widetilde{w}_r(s,x)+C(s,x)\widetilde{u}_r(s,x)+f(s,x)\Big]ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\Big[K_1(s,x,s_1,\xi)\widetilde{v}_i(s_1,\xi)+K_2(s,x,s_1,\xi)\widetilde{w}_i(s_1,\xi)+K_3(s,x,s_1,\xi)\widetilde{u}_i(s_1,\xi)+$$

$$+K_1(s,x,s_1,\xi)\lambda'_i(\xi)+K_3(s,x,s_1,\xi)\lambda_i(\xi)\Big]ds_1d\xi ds\,, \tag{9}$$

$$\widetilde{w}_r(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \left[A(t,\xi)\lambda_r'(\xi) + C(t,\xi)\lambda_r(\xi)\right]d\xi +$$

$$+ \int_0^x \left[A(t,\xi)\widetilde{v}_r(t,\xi) + B(t,\xi)\widetilde{w}_r(t,\xi) + C(t,\xi)\widetilde{u}_r(t,\xi) + f(t,\xi)\right]d\xi +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^x\int_0^{\xi}\int_{(i-1)h}^{ih}\left[K_1(t,\xi,s,\xi_1)\widetilde{v}_i(s,\xi_1) + K_2(t,\xi,s,\xi_1)\widetilde{w}_i(s,\xi_1) + K_3(t,\xi,s,\xi_1)\widetilde{u}_i(s,\xi_1) +\right.$$

$$\left. + K_1(t,\xi,s,\xi_1)\lambda_i'(\xi_1) + K_3(t,\xi,s,\xi_1)\lambda_i(\xi_1)\right]ds\,d\xi_1 d\xi, \tag{10}$$

$$\widetilde{u}_r(t,x) = \psi(t) - \psi((r-1)h) + \int_{(r-1)h}^{t}\int_0^x \left[A(s,\xi)\lambda_r'(\xi) + C(s,\xi)\lambda_r(\xi)\right]d\xi ds +$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t}\int_0^x \left[A(s,\xi)\widetilde{v}_r(s,\xi) + B(s,\xi)\widetilde{w}_r(s,\xi) + C(s,\xi)\widetilde{u}_r(s,\xi) + f(s,\xi)\right]d\xi ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{(r-1)h}^{t}\int_0^x\int_0^{\xi}\int_{(i-1)h}^{ih}\left[K_1(s,\xi,s_1,\xi_1)\widetilde{v}_i(s_1,\xi_1) + K_2(s,\xi,s_1,\xi_1)\widetilde{w}_i(s_1,\xi_1) +\right.$$

$$\left. + K_3(s,\xi,s_1,\xi_1)\widetilde{u}_i(s_1,\xi_1) + K_1(s,\xi,s_1,\xi_1)\lambda_r'(\xi_1) + K_3(s,\xi,s_1,\xi_1)\lambda_r(\xi_1)\right]ds_1 d\xi_1 d\xi ds_1. \tag{11}$$

Пусть $D_i(x) = \int_{(i-1)h}^{ih} A(s,x)ds$, $i = \overline{1,N}$. Предварительно продифференцировав соотношение (7) по x и умножив на h, подставим соответствующие выражения $\lim_{t \to ph-0} \widetilde{v}_p(t,x)$, $p = \overline{1,N}$ из (9) в (7), (8). Тогда получим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\lambda_1'(x) - \left[I + D_N(x)\right]\lambda_N'(x) = \int_{(N-1)h}^{T} C(s,x)ds\lambda_N(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{(N-1)h}^{T}\int_0^x\int_{(i-1)h}^{ih}\left[K_1(s,x,s_1,\xi)\lambda_i'(\xi) + K_3(s,x,s_1,\xi)\lambda_i(\xi)\right]ds_1 d\xi ds +$$

$$+ \int_{(N-1)h}^{T}\left[A(s,x)\widetilde{v}_N(s,x) + B(s,x)\widetilde{w}_N(s,x) + C(s,x)\widetilde{u}_N(s,x) + f(s,x)\right]ds + \tag{12}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{(N-1)h}^{T}\int_0^x\int_{(i-1)h}^{ih}\left[K_1(s,x,s_1,\xi)\widetilde{v}_i(s_1,\xi) + K_2(s,x,s_1,\xi)\widetilde{w}_i(s_1,\xi) + K_3(s,x,s_1,\xi)\widetilde{u}_i(s_1,\xi)\right]ds_1 d\xi ds,$$

$$\left[I + D_p(x)\right]\lambda'_p(x) - \lambda'_{p+1}(x) = -\int\limits_{(p-1)h}^{ph} C(s,x)ds\lambda_p(x) -$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(p-1)h}^{ph}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\left[K_1(s,x,s_1,\xi)\lambda'_i(\xi) + K_3(s,x,s_1,\xi)\lambda_i(\xi)\right]ds_1 d\xi ds -$$

$$-\int\limits_{(p-1)h}^{ph}\left[A(s,x)\widetilde{v}_p(s,x) + B(s,x)\widetilde{w}_p(s,x) + C(s,x)\widetilde{u}_p(s,x) + f(s,x)\right]ds - \tag{13}$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(p-1)h}^{ph}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\left[K_1(s,x,s_1,\xi)\widetilde{v}_i(s_1,\xi) + K_2(s,x,s_1,\xi)\widetilde{w}_i(s_1,\xi) + K_3(s,x,s_1,\xi)\widetilde{u}_i(s_1,\xi)\right]ds_1 d\xi ds,$$

$$p = \overline{1, N-1}.$$

Из условий согласования в точках $((r-1)h, 0)$, $r = \overline{1,N}$, следует

$$\lambda_r(0) = \psi((r-1)h), \quad r = \overline{1,N}. \tag{14}$$

Таким образом, получаем систему интегро-дифференциальных уравнений (12), (13) с условием (14). Обозначим через $Q(h,x)$, матрицу размерности $nN \times nN$, соответствующую левой части систем (12), (13):

$$Q(h,x) = \begin{bmatrix} hI & 0 & 0 & \ldots & 0 & h[I + D_N(x)] \\ I + D_1(x) & -I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I + D_{N-1}(x) & -I \end{bmatrix}, \quad x \in [0,\omega].$$

Для решения задачи с параметрами (4)–(8) имеем замкнутую систему уравнений (9)–(11) и (12)–(14). Неизвестными являются как функции $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, так и функции $\lambda_r(x)$, $\lambda'_r(x)$, $r = \overline{1,N}$. Поэтому для нахождения решения задачи (4)-(8) применяется итерационный метод, который строится по следующему алгоритму:

0-Шаг. Полагая в системе интегро-дифференциальных уравнений (12), (13) $\widetilde{v}_r(t,x) = 0$, $\widetilde{u}_r(t,x) = \psi(t) - \psi((r-1)h)$, $\widetilde{w}_r(t,x) = \dot{\psi}(t)$, $\lambda_r(x) = \psi((r-1)h)$, $r = \overline{1,N}$, и предполагая обратимость матрицы $Q(h,x)$ для всех $x \in [0,\omega]$, определяем $\lambda_r'^{(0)}(x)$, $x \in [0,\omega]$. С помощью условия (14) определяем $\lambda_r^{(0)}(x)$: $\lambda_r^{(0)}(x) = \psi((r-1)h) + \int\limits_0^x \lambda_r'^{(0)}(\xi)d\xi$, $r = \overline{1,N}$. В интегральных уравнениях (9)–(11) считая в правой части $\lambda'_r(x) = \lambda_r'^{(0)}(x)$, $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, находим $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}_r^{(0)}(t,x)$, $(t,x) \in \overline{\Omega}_r$, $r = \overline{1,N}$.

1-Шаг. Полагая в системе интегро-дифференциальных уравнений (12), (13) $\widetilde{v}_r(t,x) = \widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}_r(t,x) = \widetilde{u}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x) = \widetilde{w}_r^{(0)}(t,x)$, $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, $r = \overline{1,N}$, и предполагая обратимость матрицы $Q(h,x)$ для всех $x\in[0,\omega]$, определяем $\lambda_r'^{(1)}(x)$, $x\in[0,\omega]$. С помощью условия (14) определяем $\lambda_r^{(1)}(x)$: $\lambda_r^{(1)}(x)=\psi((r-1)h)+\int\limits_0^x\lambda_r'^{(1)}(\xi)d\xi$, $r=\overline{1,N}$. В интегральных уравнениях (9)–(11), считая в правой части $\lambda_r'(x)=\lambda_r'^{(1)}(x)$, $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, находим $\widetilde{v}_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{u}_r^{(1)}(t,x)$, $(t,x)\in\overline{\Omega}_r$, $r=\overline{1,N}$.

И т. д. на k-шаге находим $\lambda_r'^{(k)}(x)$, $\lambda_r^{(k)}(x)$, $\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}_r^{(k)}(t,x)$, $r=\overline{1,N}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, а также существование единственного классического решения задачи (1)–(3) обеспечивает

Теорема. *Пусть матрица $Q(x)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$ и выполнены условия:*

a) $\|[Q(x)]^{-1}\|\le\gamma(x)$;

b) $q(x)=\gamma(x)\cdot\alpha(x)h\cdot\exp\left\{\gamma(x)hT\int\limits_0^x k_1(x,\xi)d\xi\right\}\cdot\left[\exp\left\{\alpha(x)h+hT\int\limits_0^x k_1(x,\xi)d\xi\right\}-1\right]\le\chi<1$,

где $\gamma(x)$ *-непрерывная на* $[0,\omega]$ *функция,* $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(t,x)\|$, $k_1(x,\xi)=\max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}\|K_1(t,x,s,\xi)\|$, $\chi-\text{const}$.

Тогда задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство теоремы аналогично схеме доказательства теоремы 2 из [5] и проводится по вышеприведенному алгоритму с учетом специфики системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ткач А.Б.* // Нелинейные колебания. 2005. Т. 8, № 1. С. 123-131.
2. *Джумабаев Д.С.* // Вестник АН КазССР. 1988. № 1. С. 48-52.
3. *Джумабаев Д.С.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50-66.
4. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 11. С. 1673-1685.
5. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1343-1354.
6. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. 2002. № 3. С. 20-26.
7. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* // Доклады Российской АН. 2003. Т. 391. № 3. С. 295-297.
8. *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 337-346.
9. *Асанова А.Т.* // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. 2007. № 5. С. 3-8.
10. *Асанова А.Т.* // Математический журнал. 2009. Т. 9, № 1. С. 26-33.

Резюме

Дербес туындылары бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есеп функционалдық параметрлер енгізу әдісімен зерттеледі. Қарастырылып отырған есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары бастапқы деректер терминінде анықталған және ол шешімді табудың алгоритмі ұсынылған.

Summary

The periodical boundary value problem for system of integro-differential equations in partial derivatives is investigate of the method of introduction functional parameters. The sufficient conditions of existence unique classical solution considering problem in the terms initial data are established and algorithm finding their solution are proposed.

Институт математики МОН РК, г. Алматы
Поступила 01.10.2009 г.

УДК 539.3

Г. Е. БЕРИКХАНОВА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ТОЧЕЧНЫХ СВЯЗЕЙ

Изучается упругая задача о вынужденных колебаниях плоской пластины, ограниченной круглым контуром с учетом точечных связей. В некоторых работах решение вариационного уравнения методом Рауса ищется в классе базисных функций, удовлетворяющих геометрическим краевым условиям пластины без точечных связей. В данной работе показано, что такой выбор базисных функций не совсем правомерен, поскольку точечные связи могут менять гладкостные свойства собственных форм. То есть точечные связи приводят к собственным колебаниям, описываемых функциями, у которых нарушается гладкость в тех точках, где находятся точечные связи.

Рассмотрим однородную упругую изотропную пластину постоянной толщины h, ограниченную круглым контуром $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

Пусть на пластине находится Q точечно присоединенных масс M_q ($q = 1,2,3,...,Q$), и она упруго и жестко оперта в L' и соответственно S внутренних точках. Шарнирное опирание в точке может сочетаться с защемлением по любому направлению. Расположение опор и точечных масс в плоскости произвольно. Граничное условие на контуре пластины может быть одним из следующих: шарнирное опирание, защемление или свободный край. Требуется определить собственные частоты и формы поперечных колебаний круглой пластины.

Подобная задача о собственных колебаниях прямоугольной пластины изучалась в монографии [1], где предлагалась вариационная постановка и учитывались упругие точечные опоры и сосредоточенные массы.

Рассмотрим функционал Остроградского-Гамильтона [2]

$$L = \int_a^b (T - G)\,dt$$

на совокупности главных колебаний. Они должны удовлетворять условиям шарнирного закрепления жестких опор пластины в S точках

$$\sum_{i=1}^{n} W_i\left(x_i^s, y_i^s, t\right) = 0 \quad (s = 1,...,S), \tag{1}$$

где x^s, y^s – координаты s-й внутренней опоры.

Теорема. Колебание однородной изотропной пластины постоянной толщины h, ограниченный круглым контуром $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$, к которой точечно присоединены массы M_q в Q внутренних точках, и в (x_0, y_0) внутренней точке она упруго оперта, а также в внутренних точках (x^s, y^s) жестко оперта или упруго защемлена, описывается дифференциальным уравнением

$$\Delta^2 W = P(x,y), \quad (x,y) \in \Omega - \{x_0, y_0\}, \tag{2}$$

которое выполняется во всех точках пластины, где нет точечных связей, а в точечных связях справедливы многоточечные краевые условия

$$M_q \left.\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right|_{(x^q, y^q)} - 2D(1-\nu)\left(\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_{x^q-0,\, y^q-0} - \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_{x^q-0,\, y^q+0} - \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_{x^q+0,\, y^q-0} + \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_{x^q+0,\, y^q+0} \right) = 0, \tag{3}$$

$$C_0 W(x_0, y_0, t) - 2D(1-\nu)\left(\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_{x_0-0, y_0-0} - \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_{x_0-0, y_0+0} - \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_{x_0+0, y_0-0} + \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_{x_0+0, y_0+0}\right) = 0, \quad (4)$$

где $P(x,y)$ – внешнее воздействие; C_0 – жесткость точечной упругой опоры.

Для единственности решения к указанным многоточечным условиям надо добавить граничные условия

$$W\big|_{\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

При этом считаем, что $W(x,y), \dfrac{\partial W(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial W(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в точке (x_0, y_0). В работе [3] в явном виде выписана функция Грина задачи Дирихле в круге

$$\Delta^2 U = P(x,y), \quad (x,y) \in \Omega = \{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}; \quad (6)$$

$$U\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \quad (x,y) \in \partial\Omega = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}. \quad (7)$$

Выпишем ее в удобном для применения виде

$$G(x,y,\xi,\mu) = d\left[(x-\xi)^2 + (y-\mu)^2\right]\ln\left[(x-\xi)^2 + (y-\mu)^2\right] -$$

$$-d(\xi^2+\mu^2)\left[\left(x - \frac{\xi}{\xi^2+\mu^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\mu}{\xi^2+\mu^2}\right)^2\right]\ln\left[(\xi^2+\mu^2)\left(x - \frac{\xi}{\xi^2+\mu^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\mu}{\xi^2+\mu^2}\right)^2\right] +$$

$$+d\left(1 + \ln\left[(\xi^2+\mu^2)\left(x - \frac{\xi}{\xi^2+\mu^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\mu}{\xi^2+\mu^2}\right)^2\right]\right)(1-\xi^2-\mu^2)(1-x^2-y^2) \quad (8)$$

где d – некоторое нормировочное число, явный вид которого здесь не столь существенен. Непосредственно проверяется, что функция $U(x,y) = \int\limits_{\Omega} G(x,y,\xi,\mu)P(\xi,\mu)\,d\xi\, d\mu$ является решением задачи (6)–(7) для любых допустимых $P(x,y)$.

Решение задачи (6), (7)–(8) ищем в виде [4]

$$W(x,y) = U(x,y) - \int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(G(x,y,\xi,\mu)\frac{\partial \Delta_{\xi,\mu} h(\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}} - \Delta_{\xi,\mu} h(\xi,\mu)\frac{\partial G(x,y,\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(\Delta_{\xi,\mu} G(x,y,\xi,\mu)\frac{\partial h(\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}} - h(\xi,\mu)\frac{\partial \Delta_{\xi,\mu} G(x,y,\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}\right)\right] dS + \alpha G(x,y,x_0,y_0) + \quad (9)$$

$$+\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \xi} + \gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \mu} + \theta\frac{\partial^2 G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \xi \partial \mu}$$

где $h(\xi,\mu)$ – произвольная достаточно гладкая функция; $\Delta_{\xi,\mu}$ – оператор Лапласа по переменным (ξ,μ); $n_{\xi,\mu}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке (ξ,μ); $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ – некоторые числа.

Поскольку функция $G(x,y,\xi,\mu)$ выписана в явном виде (8), то значения $\dfrac{\partial G}{\partial n_{\xi,\mu}}$, $\Delta_{\xi,\mu}G$, $\dfrac{\partial}{\partial n_{\xi,\mu}}\Delta_{\xi,\mu}G$ считаем известными. Задача состоит в выборе функции $h(\xi,\mu)$ и чисел $\alpha,\beta,\gamma,\theta$ из условия, чтобы выполнялись соотношения (6), (7)–(8).

Известно, что при любом гладком $h(\xi,\mu)$ выражение

$$V(x,y)=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(G(x,y,\xi,\mu)\frac{\partial\Delta_{\xi,\mu}h(\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}-\Delta_{\xi,\mu}h(\xi,\mu)\frac{\partial G(x,y,\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\frac{\partial h(\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}-h(\xi,\mu)\frac{\partial\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}\right)\right]dS$$

является решением однородного уравнения

$$\Delta^2V=0,\quad (x,y)\in\Omega.$$

Поэтому очевидно, что $W(x,y)$ является решением неоднородного уравнения (6). Остается выбрать функцию $h(\xi,\mu)$ и числа $\alpha,\beta,\gamma,\theta$ так, чтобы правая часть (9) удовлетворяла краевым условиям (7)–(8).

Непосредственной проверкой убеждаемся [5] в справедливости равенств

$$G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0,\quad \Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n_{\xi,\mu}}G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial}{\partial n_{\xi,\mu}}\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=-\delta(x-\xi,y-\mu)$$

при любых $(\xi,\mu)\in\partial\Omega$.

Отсюда сразу же следует

$$V(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=-h(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}. \tag{10}$$

Точно также из равенств

$$\frac{\partial}{\partial n_{x,y}}G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial^2}{\partial n_{x,y}\partial n_{\xi,\mu}}G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial n_{x,y}}\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=\delta(x-\xi,y-\mu),\ \frac{\partial^2}{\partial n_{x,y}\partial n_{\xi,\mu}}\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0.$$

Из $(\xi,\mu)\in\partial\Omega$ следует граничное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial n_{x,y}}V(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=\frac{\partial}{\partial n_{x,y}}h(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}. \tag{11}$$

Из равенств (10) и (11) вытекает, что $h(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0$ и $\left.\dfrac{\partial}{\partial n_{x,y}}h(x,y)\right|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0$.

Поскольку $G(x,y,t,\tau)$ по переменным (t,τ) удовлетворяет условиям (7), то $V(x,y)=0$ для всех $(x,y)\in\Omega\setminus\{x_0,y_0\}$.

Надо выбрать постоянные $\alpha,\beta,\gamma,\theta$ так, чтобы удовлетворялось точечное условие (8) и непрерывность в $W(x,y)$, $\dfrac{\partial W(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial W(x,y)}{\partial y}$ в точке (x_0,y_0). Это всегда возможно. Таким образом, задача (6), (7)–(8) имеет решение, причем предложен конкретный алгоритм его построения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И.* Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: Изд. СО РАН, 1996. 189 с.

2. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. Л.–М.: Гостехиздат, 1934. 172 с.

3. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю.* Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Докл РАН. 2008. Т. 421, № 3. С. 305-307.

4. *Павлов Б.С., Шушков А.А.* Теория расширений и потенциалы нулевого радиуса с внутренней структурой // Математический сборник. 1988. Т. 137(179), № 2. С. 147-183.

5. *Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д.* Представление и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений // Математический журнал. 2008. Т. 8, № 1(27). С. 50-58.

Резюме

Жазық дөңгелек пластинаның еріксіз тербелісінің математикалық моделі ұсынылады. Осы математикалық модельдің қарама-қайшылықсыздығы, оны есептеу алгоритмі көрсетілген.

Summary

In work the mathematical model about the compelled fluctuations of a flat round plate with dot elastic communications is offered. Consistency of offered mathematical model is shown. The algorithm of calculation of the received mathematical model is offered.

Поступила 6.01.2010г.