МАТЕМАТИКА

УДК 330.42:519.863:51-77

А.А. АШИМОВ, Ю.В. БОРОВСКИЙ, А.С. АЖИБЕКОВА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НА БАЗЕ МОДЕЛИ СОЛОУ

В работе представлены некоторые результаты по развитию и применению элементов теории параметрического регулирования на примере односекторной модели экономического роста Солоу. Показана эффективность применения теории параметрического регулирования для увеличения валового внутреннего продукта страны. В частности, получены оптимальные значения параметров для регулирования развития экономической системы на базе рассмотренной математической модели.

Ключевые слова: односекторная модель, технический прогресс, производственная функция, параметрическое регулирование, параметрическая идентификация.

1. Введение

В настоящее время особую актуальность приобретает выбор оптимальных значений экономических инструментов развития национальной экономики на базе использования ее математических моделей [1].

Важным направлением выбора экономических инструментов является использование теории параметрического регулирования. Такой подход теории параметрического регулирования развития динамических систем ранее показал свою эффективность на отдельных примерах [2,3].

В данной работе приводятся новые результаты по развитию и применению теории параметрического регулирования для нахождения оптимальных значений управляемых параметров для случая односекторной модели экономического роста Солоу, дающих возможность улучшить основные экономические показатели страны.

2 Математическая модель Солоу

В модели Солоу экономическая система страны рассматривается как единое целое, производит один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться [4].

Представленную в [4] модель экономического роста Солоу запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} L(t) = L(0)e^{\nu t} \\ K(t+1) = K(t) - \mu K(t) + \rho X(t) \\ X(t) = AK(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

с начальным условием:

$$K(0) = K_0 \quad (2)$$

Здесь t – номер месяца ($t = 0,1,2,...$). Состояние экономики задано следующими эндогенными переменными: $X(t)$ – ВВП (млрд. тенге в месяц), $L(t)$ – число занятых (млн. чел.), $K(t)$ – основные фонды (млрд. тенге) и экзогенными показателями: ν – месячный темп прироста числа занятых, μ – доля выбывших за месяц основных производственных фондов, ρ – доля валовых инвестиций в ВВП, A – коэффициент нейтрального технического прогресса, α – коэффициент эластичности по фондам.

3 Оценки параметров и верификация математической модели Солоу

Нахождение оценок неизвестных значений экзогенных параметров исследуемой макроэкономической модели осуществлялось с помощью решения задачи параметрической идентификации поисковым методом в смысле минимума критерия, характеризующего отклонения значений выходных переменных модели от соответствующих наблюдаемых значений на основе известных статистических данных Республики Казахстан за 2001-2007 годы [5].

Для оценки параметра ν использовался критерий (3):

$$S_1^{\,2} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{L(t) - L^*(t)}{L^*(t)}\right)^2 \to \min,\ t = 12*i \quad (3)$$

Для оценки параметров A, α, μ, ρ использовался критерий (4):

$$S_2^{\,2} = \frac{1}{13}\sum_{i=0}^{6}\left[\left(\frac{X(t) - X^*(t)}{Y^*(t)}\right)^2 + \left(\frac{K(t) - K^*(t)}{K^*(t)}\right)^2\right] \to \min,$$

$$t = 12*i \quad (4)$$

Здесь $t = 0$ соответствует январю 2001 года; $L(t)$ – расчетная численность занятых в млн. чел.; $X(t)$ – расчетный ВВП в млрд. тенге в месяц; $K(t)$ – расчетные основные фонды в млрд. тенге. Знак «*» соответствует наблюдаемым значениям соответствующих переменных.

На значения идентифицируемых параметров накладываются следующие ограничения:

$$-1 \le \nu \le 1; A > 0; 0 \le \alpha \le 1; 0 < \rho \le 0.5; 0 < \mu \le 1.$$

В результате решения указанной выше задачи параметрической идентификации были получены следующие значения оцениваемых параметров: $\nu = 0.0017$; $A = 0.0689$; $\alpha = 0.999$; $\mu = 0.00016$; $\rho = 0.259$. При этом относительная величина среднеквадратического отклонения расчетных значений переменных от соответствующих наблюдаемых значений составила приблизительно $100S_1 = 0.89\%$ и $100S_2 = 5.4\%$.

Верификация математической модели осуществлялась с помощью ретроспективного прогноза на базе модели на 2008-2009 годы. В таблице 1 представлены наблюдаемые, расчетные значения и отклонения расчетных значений основных выходных эндогенных переменных модели от соответствующих фактических значений.

Для проведения следующих экспериментов повторно была решена задача параметрической идентификации модели для промежутка времени с 2001 по 2009 годы. В результате решения задачи параметрической идентификации модели для указанного промежутка времени получены следующие оценки значений оцениваемых параметров: $\nu = 0.0017$; $A = 0.0686$; $\alpha = 0.999$; $\mu = 0.00004$; $\rho = 0.256$. Значения критериев вида S_1 и S_2 оказались равны 0.0089 и 0.055 соответственно.

В вычислительных экспериментах для нахождения минимальных значений непрерывной функции нескольких переменных использовался алгоритм направленного поиска Нелдера - Мида [6].

4 Исследование параметрической чувствительности

Результаты проведенных исследований параметрической чувствительности относительных значений для малых отклонений от найденных оценок значений параметров: ν, A, α, μ, ρ математической модели (1)-(2) представлены в таблице 2. Каждый элемент матрицы вычисляется по формуле:

$$F(E) = \frac{\Pi(T) - \Pi^*(T)}{0.01\Pi^*(T)}.$$

Здесь T – период времени в месяцах ($T = 96$); $\Pi^*(T)$ – значение эндогенной переменной, полученное при запуске модели со значениями экзогенных параметров, в свою очередь, полученными в результате предварительной оценки параметров; $\Pi(T)$ – значение соответствующей эндогенной переменной, полученное при увеличении варьируемого экзогенного параметра E на 1%, при этом значения остальных экзогенных параметров устанавливаются равными результатам их предварительной оценки.

Анализ матрицы чувствительности показывает, что:

1) с увеличением нейтрального технического прогресса, коэффициента эластичности и доли валовых инвестиций объем основных фондов и ВВП страны растет;

2) с увеличением доли выбывших за месяц основных производственных фондов объем основных фондов и ВВП страны падает.

5 Выбор оптимальных законов параметрического регулирования

Рассмотрим возможность осуществления эффективной государственной политики через выбор оптимальных законов регулирования на примере экономического параметра – доли выбывших за год основных производственных фондов (ρ).

В работе выбор оптимальных законов параметрического регулирования осуществлялся в среде набора следующих зависимостей:

$$U_1(t) = \rho^* + k_1 \frac{K_1(t) - K(0)}{K(0)}; \quad U_2(t) = \rho^* - k_2 \frac{K_2(t) - K(0)}{K(0)};$$
$$U_3(t) = \rho^* + k_3 \frac{X_3(t) - X(0)}{X(0)}; \quad U_4(t) = \rho^* - k_4 \frac{X_4(t) - X(0)}{X(0)}; \qquad (5)$$

Здесь U_i – i-й закон регулирования параметра ρ ($i = \overline{1,4}$); k_i – настраиваемый коэффициент i-го закона регулирования, $k_i > 0$; ρ^* – постоянная, равная базовому значению параметра ρ; $K_i(t)$, $X_i(t)$ – решение системы (1) с начальным условием $K_i(0) = K(0)$ при использовании закона регулирования U_i. Использование закона регулирования U_i означает подстановку функции из правых частей (5) в систему (1) вместо параметра ρ; $t = 0$ – время начала регулирования (2001г.).

Таблица 1. **Результаты ретроспективного прогноза модели**

Год	декабрь 2008	декабрь 2009
$X^*(t)$, млрд. тенге в мес.	1337.7	1341.69
$X(t)$, млрд. тенге в мес.	1339.17	1489.209
Погрешность (%)	0.11	11.00
$K^*(t)$, млрд. тенге	17630.1	Нет данных
$K(t)$, млрд. тенге	17490.0	21590.42
Погрешность (%)	-0.79	-
$L^*(t)$, млн.чел.	7.857	7.903
$L(t)$, млн.чел.	7.752	7.915
Погрешность (%)	-1.34	0.15

Таблица 2. **Матрица чувствительности**

Параметр \ Переменная	L	K	X
ν	0.1703	0.0000	0.0000
A	0.0000	1.67092	2.6876
α	0.0000	13.14932	22.5909
μ	0.0000	-0.00385	-0.0038
ρ	0.0000	1.67092	1.6709

Задачу выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного из экономических параметров ρ можно сформулировать в следующем виде. На основе математической модели (1)-(2) найти оптимальный закон параметрического регулирования U_i и его коэффициент k_i в среде набора алгоритмов (5), который обеспечил бы максимум критерия:

$$V = \frac{1}{97}\sum_{t=0}^{96} X_i(t) \to \max \qquad (6)$$

при ограничениях:

$$0 \le \rho_i(t) \le 0.5\,,\ i = \overline{1,4} \qquad (7)$$

Сформулированная задача решается в два этапа:

– на первом этапе определяются оптимальные значения коэффициентов k_i для каждого закона U_i путем перебора их значений в интервале $[0;1]$, квантованном с достаточно малым шагом, обеспечивающие максимум критерия V при ограничениях (7);

– на втором этапе выбирается закон оптимального регулирования параметра ρ на основе результатов первого этапа по максимальному значению критерия V.

Результаты численного решения задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования экономической системы государства на уровне одного экономического параметра показывают, что наилучший результат $V = 849.997$ может быть получен при использовании законов регулирования U_1 и U_3 с коэффициентом $k_1 = k_3 = 0.03365$:

$$\rho(t) = 0.256 + 0.03365\frac{K(t) - K(0)}{K(0)}$$

или

$$\rho(t) = 0.256 + 0.03365\frac{X(t) - X(0)}{X(0)}.$$

Отметим, что значение критерия без использования параметрического регулирования равно $V = 710.177$.

6 Нахождение точек бифуркации

Рассмотрим зависимость результатов выбора закона параметрического регулирования на уровне параметра ρ от неуправляемых параметров (μ, α), значения которых принадлежат прямоугольной области: $\alpha \in [0.9; 1]$, $\mu \in [0; 0.007]$.

В результате вычислительного эксперимента были получены графики зависимостей оптимального значения критерия (6) V от значений параметров (μ, α) для каждого из четырех воз-

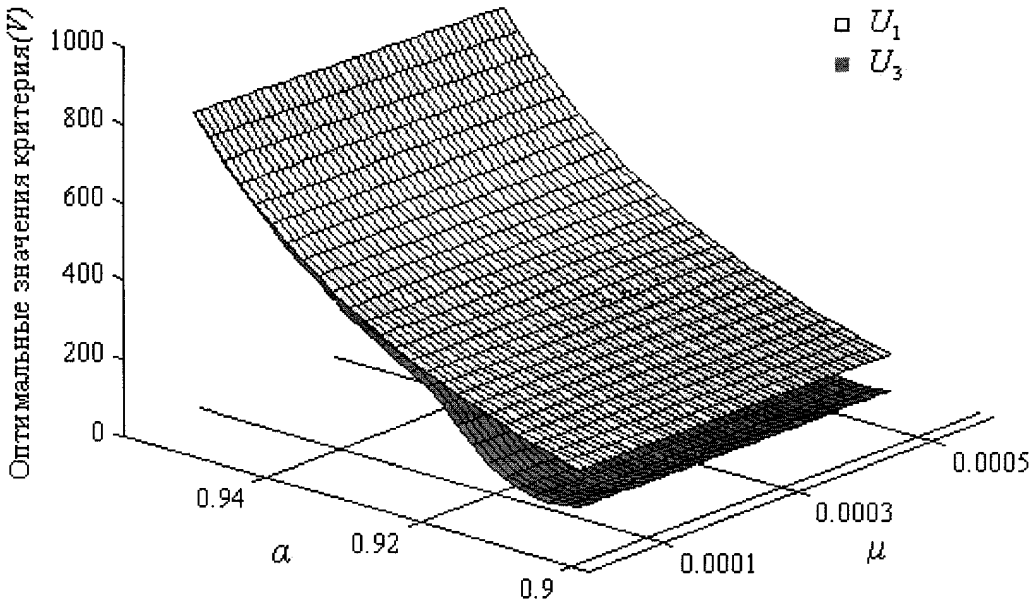

Рис. 1. Графики оптимальных значений критерия V

можных законов (5). На рисунке 1 представлены графики для законов U_1 и U_3, которые дают наибольшие значения критерия в рассматриваемой области значений параметров (μ,α). Полученные поверхности пересекаются в точках $\alpha=1$, $\mu\in[0;0.007]$, являющиеся точками бифуркации экстремалей рассматриваемой задачи.

7 Исследование структурной устойчивости модели

Исследование грубости (структурной устойчивости) модели (1)-(2) основывается на поиске оценки цепно-рекуррентного множества $R(f,N)$ динамической системы в компактном множестве N ее фазового пространства. Для математической модели экономической системы в качестве компакта N берется параллелепипед ее фазового пространства, включающий в себя все возможные траектории эволюции экономической системы для рассматриваемого промежутка времени. Определяется отображение f, определенное в N и задаваемое сдвигом по траекториям динамической системы для фиксированного промежутка времени. Далее строится разбиение C компакта N на ячейки N_i. Задается ориентированный граф G, вершины которого соответствуют ячейкам, а ребра, соединяющие ячейки N_i с N_j соответствуют условиям пересечения образа одной ячейки $f(N_i)$ с другой ячейкой N_j. В графе G находятся все возвратные вершины (вершины, принадлежащие циклам). Если множество таких вершин пустое, то $R(f,N)$ – пустое и процесс его локализации завершается. Делается вывод о слабой структурной устойчивости динамической системы [7].

Компакт N в фазовом пространстве переменных исследуемой модели (1)-(2): K (основные фонды), L (численность занятых) определялся неравенствами:

$$1000\le K\le 22000,\ 5\le L\le 10$$

В результате вычислительного эксперимента был получен результат: $R(f,N)=\varnothing$. Это означает, что односекторная модель экономического роста Солоу для описания взаимодействия рынка благ и денежного рынка оценивается как слабо структурно устойчивая в компакте N.

8 Заключение

1. Показана эффективность применения теории параметрического регулирования на примере математической модели Солоу экономического роста. Предложены оптимальные значения управляемых параметров экономической политики на базе рассмотренной математической модели.

2. Методами теории параметрического регулирования найдены оптимальные законы параметрического регулирования развития мировой динамики на уровне одного экономического параметра.

3. Найдены точки бифуркации для заданной области значений неуправляемых параметров.

4. Установлена грубость математической модели Солоу.

5. Полученные результаты могут быть рекомендованы для использования при разработке и осуществлении эффективной государственной политики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шараев Ю.В.* Теория экономического роста [Текст]: учеб. пособие для вузов. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ. 2006. 254 с.

2. *Ашимов А.А., Боровский Ю.В., Искаков Н.А., Султанов Б.Т., Ашимов Ас. А.* Элементы теории параметрического регулирования эволюции экономической системы страны. – М.: Физматлит, 2009. 96 с.

3. *Ашимов А.А., Сагадиев К.А., Боровский Ю.В., Искаков Н.А., Ашимов Ас.А.* Развитие и применение теории параметрического регулирования на базе одного класса математических моделей // IVмеждународная конференция по проблемам управления. (26 – 30 января 2009 года): Сборник трудов. М.: Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2009. С. 109-115.

4. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: Юнити, 2002.

5. Казахстан в 2008 году. Статистический сборник / Под редакцией А.А. Смаилова – Астана: Агентство Республики Казахстан по статистике, 2009. 493 с.

6. *Nelder J.A. and Mead R.* «A simplex method for function minimization», The Computer Journal, 1965, Vol. 7, pp. 308-313.

7. *Петренко Е.И.* Разработка и реализация алгоритмов построения символического множества // Дифференциальные уравнения и процессы управления (электронный журнал), 2006. №3. С. 55-96.

Summary

The paper presents some results of the development and application of the parametrical regulation theory elements based on the Solow model of economic growth. The application efficiency of the parametric regulation theory for the increasing gross domestic product of the country is shown. In particular, optimal values of the parameters to control development of economic system based on the examined mathematical model were obtained.

Резюме

Солоудың бір секторлы экономикалық өсу моделінің нұсқасында параметрлік басқару теориясын қолдану мен дамытуға қатысты кейбір нәтижелер берілген. Параметрлік реттеу теориясын жалпы ішкі өнімді өсіруге қолданудың тиімділігі көрсетілген. Атап айтқанда, қарастырылып отырған математикалық модель негізінде экономикалық жүйенің дамуын реттейтін параметрлердің оңтайлы мәндері табылған.

КазНТУ имени К.И. Сатпаева,
г. Алматы

Поступила 06.10.2010 г.