УДК 528.36

С. А. АТАНБАЕВ, П. А. КОЖАБЕКОВА

РАСЧЕТ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНЯ ПОЧВ И ГРУНТОВ ПО ДАННЫМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Предложен способ определения градиента температуры и теплового потока на поверхности почвы, основанный на обработке результатов измерения температур на двух различных глубинах и решении граничной обратной задачи теплопроводности (ОЗТ), представленной в форме задачи Коши для эволюционного уравнения методом квазиобращения (МКО). Приведены результаты численного эксперимента.

Развитие методов дистанционного зондирования поверхности суши с космических летательных аппаратов и их использование в почвоведении, сельском хозяйстве и метеорологии потребовало решения ряда новых прикладных задач теплофизики почв. К ним относится, например, задача расчета теплового состояния почв и грунтов по данным нестационарного теплофизического эксперимента. В этой граничной обратной задаче (ОЗТ) по температуре и тепловому потоку (или градиенту температуры) на одной границе плоского слоя почвы требуется восстановить температуру и тепловой поток и градиент температуры на противоположной границе. Начальное распределение температуры по слою в такой постановке ОЗТ не задается.

Граничная обратная задача теплопроводности для почвенного слоя может быть поставлена в одном из следующих видов:

- по заданным температуре T_l и тепловому потоку q_l рассчитать температуру и тепловой поток при $x=L$ (определение температуры почвы на глубине $x=L$ по результатам измерения температуры и теплового потока на заданной глубине $x=l$, рис. 1, а).

- по заданным температуре T_l и тепловому потоку q_l рассчитать температуру и тепловой поток при $x=0$ (восстановление температуры поверхности почвы – по результатам измерения температуры и теплового потока на заданной глубине, рис. 1, а).

- по заданным на поверхности температуре T_0 и тепловому потоку q_0 рассчитать температуру и тепловой поток при $x=l$ или $x=L$ (восстановление температуры на заданной глубине по результатам измерения температуры и теплового потока на поверхности, рис. 1, б).

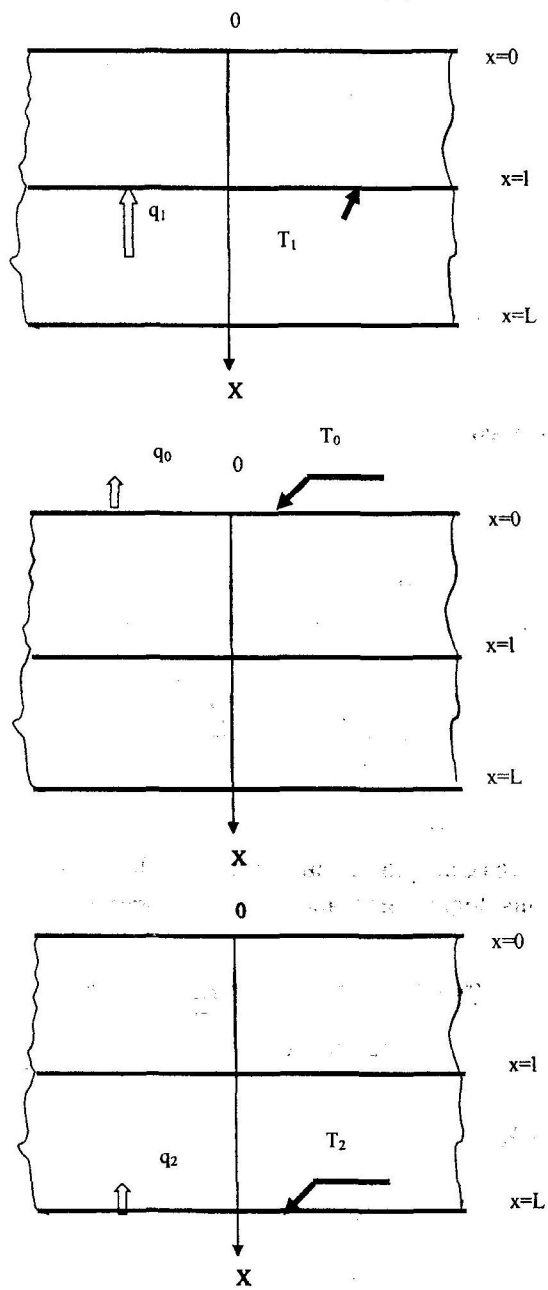

Рис. 1. Графическая иллюстрация к решению ОЗТ

- по заданным температуре T_2 и тепловому потоку q_2 рассчитать температуру и тепловой поток при $x=0$ или *при* $x=l$ (восстановление температуры поверхности почвы по результатам измерения температуры и теплового потока на заданной глубине, рис. 1, г).

Прямая задача теплопроводности для исследуемого приповерхностного слоя почвы (или грунта) при отсутствии фазовых переходов и незначительном переносе тепла с влагой может быть представлена с помощью уравнений:

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}),0<x<L,t>0. \quad (1)$$

$$T(0,t)=T_0(t), \quad (2)$$

$$T(L,t)=T_1(t), \quad (3)$$

где c - объемная удельная теплоемкость почвы, T - температура, λ - теплопроводность, x - координата, t - время.

Для корректной постановки задачи расчета температурного поля указанного слоя почвы к уравнению теплопроводности (1) и граничным условиям (2)-(3) необходимо добавить начальное условие – распределение температуры в начальный момент времени.

Сведение ОЗТ к задаче Коши для эволюционного уравнения не требует задания начального условия и такая задача ставится следующим образом:

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=-a\frac{\partial q}{\partial x},0<x<x_1,0<t<t_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=-q,0<x<x_1,0<t<t_1, \quad (5)$$

$$T(0,t)=T_0(t),\frac{\partial T}{\partial x}=-q_0(t),x=0,0<t<t_1, \quad (6)$$

где $x_1=L$ - заданная глубина, T(x,t) - температура, q(x,t) - тепловой поток, $T_0(t)$ и $q_0(t)$ - заданные функции (измеренные на глубине x_1 - температура и ее градиент), t_1 - время протекания исследуемого процесса, а - температуропроводность.

Меняя для удобства местами переменные x и t и вводя в рассмотрение вектор $U=\{q,T\}^T$ систему уравнений (4)-(6) можно записать в векторно-матричном виде:

$$\frac{dU}{dt}=AU,0<t<t_1, \quad (7)$$

$$U(0)=U_0=\{-q_0,T_0\}^T, \quad (8)$$

где

$$A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\\ -E & 0\end{pmatrix}. \quad (9)$$

Используя для решения некорректно поставленной задачи (7)-(8) метод квазиобращения, переходим к решению следующей задачи:

$$\frac{dU_\alpha}{dt}=AU_\alpha-\alpha A^*AU_\alpha, \quad (10)$$

$$U_\alpha=U_0. \quad (11)$$

Здесь U_α - искомое решение возмущенной задачи, α - параметр регуляризации, A^* и A^*A - матрицы следующего вида:

$$A^*=\begin{pmatrix}0 & -E\\ -a^{-1}\frac{\partial}{\partial x} & 0\end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$A^*A=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{pmatrix}. \quad (13)$$

Переходя от операторной к дифференциальной форме записи, получаем:

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial t}=-\frac{1}{a}\frac{\partial T_\alpha}{\partial x}-\alpha q_\alpha, \quad (14)$$

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial t}=-\frac{\alpha}{a^2}\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial x^2}-q_\alpha, \quad (15)$$

$$q_\alpha=-q_0,T_\alpha=T_0. \quad (16)$$

Для нахождения приближенного решения задачи (14)-(16) воспользуемся методом конечных разностей. Для этого в области изменения непрерывных аргументов t,x $G=\{0\ge t\ge t_1,0\le x\le x_1\}$ при помощи прямых $t=i\tau$ и $x=jh$ $(i=0,1,2,...,N;$ $j=0,1,2,...,M)$, $h>0$ - шаг по времени, $\tau<0$ - шаг по пространственной переменной, построим сетку $G^h=\{t_i=t_{i-1}+\tau,x_j=x_{j-1}+h;i=1,2,3,...,N;$ $j=1,2,3,...,M\}$.

Заменяя в (14)-(16) частные производные отношениями конечных разностей и разрешая полученную систему уравнений относительно значений сеточной функции на последующем шаге, переходим к следующей разностной схеме:

$$q_{i+1}^{1} = -\frac{\tau}{ah}\left(T_i^2 - T_i^1\right) - (\alpha - 1)q_i^1, j = 1, \quad (17)$$

$$q_{i+1}^{j} = -\frac{\tau}{2ah}\left(T_i^{j+1} - T_i^{j-1}\right) - (\alpha - 1)q_i^j,$$

$$j = 2,...,M-1, \quad (18)$$

$$q_{i+1}^{M} = -\frac{\tau}{ah}\left(T_i^M - T_i^{M-1}\right) - (\alpha - 1)q_i^M, j = M, \quad (19)$$

$$T_{i+1}^{j} = \frac{\alpha\tau}{a^2h^2}\left(T_i^{j+1} - 2T_i^j + T_i^{j-1}\right) + T_i^j - \tau q_i^j,$$

$$j = 2,...M-1, \quad (20)$$

Производя вычисления по формулам (17) – (20) последовательно для каждого i, находим регуляризованное решение, зависящее от параметра α. При этом для определения температуры в точках j=1 и j=M используются уравнения (4)-(5).

Устойчивость вычислительного алгоритма исследовалась на примере слоя песчаного грунта. В качестве начальных данных задачи Коши принимались температура и градиент температуры на глубине 1см. Вычисления температур и градиентов температуры внутри слоя песчаного грунта производились по формулам (17)-(20) без регуляризации (α=0) и с регуляризацией при помощи МКО. Расчет осуществлялся на глубину 2 см, 3 см, 4 см, 5 см, 50 см и 1 м. Шаг по времени принимался равным 1часу. Шаг по пространственной переменной был равен 0.001 м. Температуропроводность принималась равной $a = 0.65 \times 10^{-6}$ Вт/(м·К), параметр регуляризации выбирался экспериментально.

На рис. 2 приведены результаты восстановления суточного хода температуры на глубинах 2 см (ряд 3), 3 см (ряд 2) и 4 см (ряд 4) по суточному ходу температуры на глубине 1 см (ряд 1) и ее градиента.

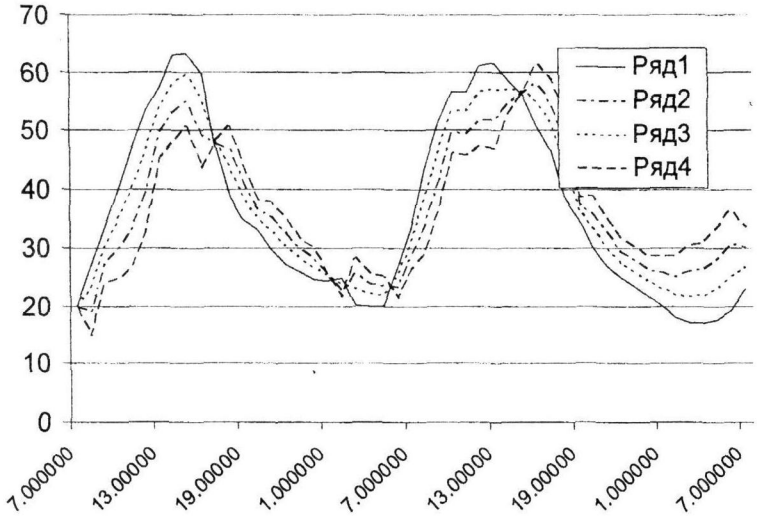

Рис. 2. Суточный ход температуры

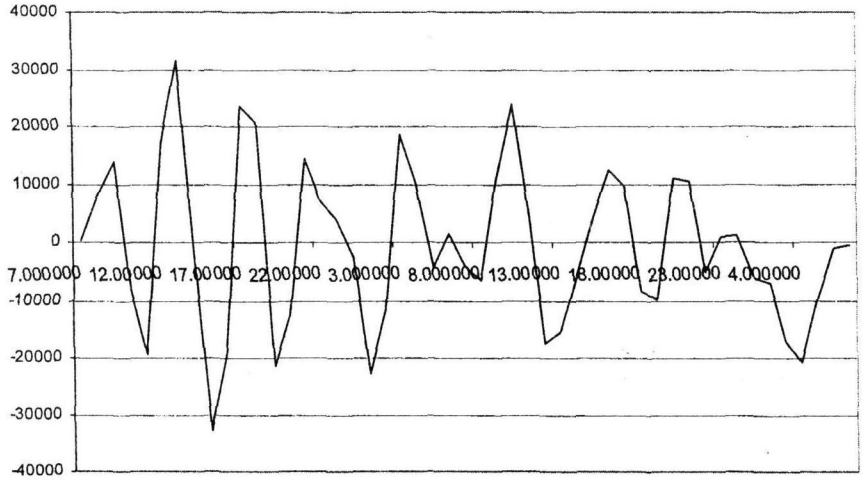

Рис. 3. Неустойчивое решение

Результаты вычисления температуры на глубине 2 см полностью совпадают с данными натурного эксперимента. Далее на глубинах 3 см и 4 см происходит заметное искажение температурных кривых, обусловленное отсутствием устойчивости алгоритма решения рассматриваемой ОЗТ без применения регуляризации с помощью МКО.

Неустойчивость приближенного решения задачи Коши методом конечных разностей без применения регуляризации в полной мере проявляется при восстановлении суточного хода температуры на глубине 1м (рис. 3).

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что при правильном выборе параметра регуляризации алгоритм МКО обладает свойством счетной устойчивости может быть использован при решении широкого круга задач теплофизики почв.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Султангазин У.М.* Создание космического мониторинга и информационной базы данных для решения сельскохозяйственных и экологических задач // Математический журнал. Алматы, 2001. Т. 1. №1. С. 77-83.

2. *Атанбаев С.А.* Метод квазиобращения и его приложение. Алматы: Университет "Кайнар", 1999. 208 с.

3. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.

4. *Айзенштат Б.А., Зуев Н.В.* Некоторые черты теплового баланса песчаной пустыни / Под ред. Б. А. Бугаева. Тр. Ташкентской геофизической обсерватории, 1951.

Резюме

Жер қыртысының бетіндегі температура градиентімен жылу ағынын есептеуді түрлі терендіктегі температураларды өлшеу нәтижелерін өңдеуге және жылу өткізгіштің шектік кері есебін шығаруға негізделген әдіс ұсынылды. Шектік кері есеп Коши мәселесінің формуласында эволюциялық теңдеу үшін квазиайналым түрінде қолданылған және есептік эксперименттік нәтижелері көрсетілген.

Summary

There is offered the way of the determination of the gradient of the temperature and heat flow on surfaces of ground, which founded on result processing measurements of the temperature on two different depths and decision of the border inverse tasks temperature-conducting, presented in the form of the problem Koshi for evolution equations the by method of quasi referencing. There are given the results of the numerical experiment

КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы;
ЮКГУ им. М. Ауезова

Поступила 10.06.08г.