

УДК 622.011.4; 622.023.1539.3

Л. Б. АТЫМТАЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНОГО МНОГОСВЯЗНОГО МАССИВА ПРИ СТАЦИОНАРНОЙ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН ПРИ РЕШЕНИИ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Работа посвящена исследованию динамического напряженно-деформированного состояния упругого транстропного массива с наклонной плоскостью изотропии, содержащем серию неподкрепленных выработок произвольного профиля и произвольного расположения друг относительно друга, при стационарной дифракции упругих продольно-сдвиговых волн в случае плоской и антиплоской деформации. В работе приводится строгое решение некоторых классов задач о динамике анизотропного многосвязного массива с неподкрепленными выработками, получены аналитические выражения, использующие аппарат теории механики деформируемого твердого тела, теории дифракции волн, теории разложения цилиндрических функций, метода разделения переменных и методов теории функций комплексных переменных.

Предположим, что в анизотропном массиве, моделируемым трансверсально-изотропной средой с наклонной плоскостью изотропии, проведены I , $I = \overline{1, L}$ неподкрепленных горизонтальных выработок с осью, параллельной оси Ox_3 , в системе координат $Ox_1x_2x_3$, где ось Ox_3 направлена вертикально вверх, а оси Ox_1 и Ox_2 – соответственно горизонтально вкrest и по простиранию плоскости изотропии (см. рис. 1).

Уравнения обобщенного закона Гука для такого транстропного массива с наклоненной под углом φ к горизонту плоскостью изотропии записываются в виде:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (1)$$

где

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}]; \quad \{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}]; \quad [D] = [b_{ij}], (i, j = \overline{1, 6}).$$

Здесь коэффициенты b_{ij} зависят от упругих постоянных массива E_k , ν_k ($k = 1, 2$), G_2 и угла наклона плоскости изотропии φ [1].

Предположим, что S_l ($l = \overline{1, L}$) области поперечного сечения выработок, а $S_0 = \mathbb{R}^2 - \bigcup_{l=1}^L S_l$ – область поперечного сечения многосвязной среды (транстропного массива). С центром каждой выработки свяжем локальную безразмерную координатную систему (x_{1l}, x_{2l}) ($l = \overline{1, L}$), $(x_{10}, x_{20}) = (x_l/R, x_3/R)$,

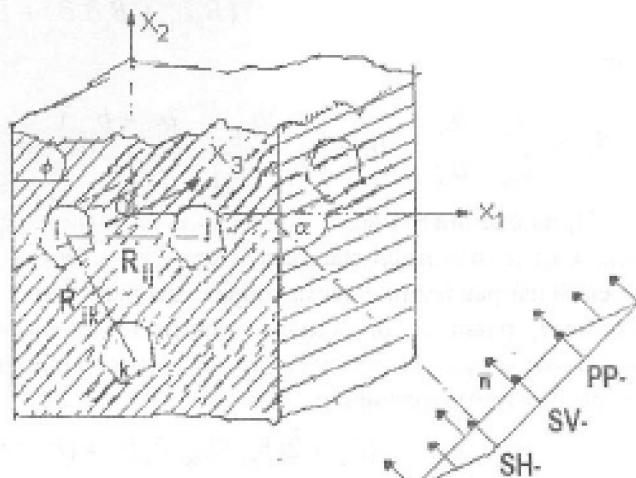


Рис. 1

\bar{R} – линейный размер массива. Горизонтальные некруговые выработки радиуса R_l ($l = \overline{1, L}$) проведены вдоль оси Ox_1 и имеют поперечное сечение с контуром Γ_l (рис. 1). Будем считать, что внешность единичного круга с помощью функции $\tilde{\omega}(\zeta_l)$ отображается на внешность контура Γ_l , границы области S_l ($l = \overline{1, L}$):

$$z_l = \tilde{\omega}(\zeta_l) = R_l(\zeta_l + \sum_{m=1}^{N_l} d_m \zeta_l^{-m}), z_l = x_1 + ix_2, \quad \zeta_l = \rho_l e^{i\theta_l}, d_m = d_{lm} + id_{zm}. \quad (2)$$

Предполагается, что в транстрапном массиве в плоскости поперечного сечения выработка вдоль направления, задаваемого единичным вектором $\vec{n} = (n_1, n_2)$, падает плоская стационарная упругая гармоническая волна, которая может быть разбита на квазипротодольную волну и две квазипоперечные волны. Фронт волны параллелен осям выработок, сама волна поляризована в плоскости поперечного сечения выработок в случае рассмотрения PP-, SV-волни растяжения-сжатия и параллельно оси Ox_1 в случае SH-волни сдвига. Вид волны может быть представлен следующим выражением

$$\bar{u} = \bar{u}^* e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

где \bar{u}^* – амплитуда волны, описываемая выражениями в случае разделения волн

$$u_1^* = U_1^* \exp[i(k_1^{(1)} x_1 + k_2^{(1)} x_2)], \quad u_2^* = U_2^* \exp[i(k_1^{(2)} x_1 + k_2^{(2)} x_2)], \quad u_3^* = U_3^* \exp[i(k_1^{(3)} x_1 + k_2^{(3)} x_2)]$$

ω – частота волны; $(\bar{k}^{(1)}, \bar{k}^{(2)}, \bar{k}^{(3)})$ – волновой вектор; n_1, n_2 – направляющие косинусы угла падения волны α -угла между осью Ox_1 и вектором \vec{n} (см. рис. 1).

В случае падения PP-, SV-волни растяжения-сжатия и сдвига в рассмотрение берется состояние плоской деформации, и дифракционное поле характеризуется составляющими перемещений в плоскости поперечного сечения выработок $\bar{u} = (u_1, u_2)$. Красовая задача формулируется исходя из уравнений движения с учетом, что все составляющие перемещений, кроме (u_1, u_2) , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x_1, x_2) в плоскости поперечного сечения выработок. Тогда для выработок глубокого заложения можно записать следующие уравнения

$$\begin{cases} (b_{11}\partial_1^2 + 2b_{16}\partial_1\partial_2 + b_{66}\partial_2^2 + \omega_1^2)u_1 + (b_{16}\partial_1^2 + (b_{12} + b_{66})\partial_1\partial_2 + b_{26}\partial_2^2)u_2 = 0; \\ (b_{16}\partial_1^2 + (b_{12} + b_{66})\partial_1\partial_2 + b_{26}\partial_2^2)u_1 + (b_{66}\partial_1^2 + 2b_{26}\partial_1\partial_2 + b_{22}\partial_2^2 + \omega_1^2)u_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В случае дифракции упругих продольных и поперечных волн в плоскости поперечного сечения выработок дифференциальные уравнения вида (4) удобней представить в матричной форме, а именно:

$$(B_0\partial_1^2 + B_1\partial_1\partial_2 + B_2\partial_2^2 + B_3)\bar{u}_p = 0, \quad (5a)$$

где

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{16} \\ b_{16} & b_{66} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2b_{16} & b_{12} + b_{66} \\ b_{12} + b_{66} & 2b_{26} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{66} & b_{26} \\ b_{26} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_p = \{u_1, u_2\}.$$

При падении SH-волни сдвига рассматривается антиплоская деформация выработок, а дифракционное поле, в этом случае, характеризуется амплитудными составляющими перемещений $u_3(x_1, x_2)$ в осевом направлении. Рассматривая красовую задачу учитываем, что все составляющие перемещений, кроме u_3 , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x_1, x_2) в плоскости поперечного сечения выработок. В этом случае остается рассмотреть уравнение

$$\{\partial_1^2 + 2(b_{45}/b_{55})\partial_1\partial_2 + (b_{44}/b_{55})\partial_2^2 + \omega_0^2\} u_3(x_1, x_2) = 0, \quad (5b)$$

Коэффициенты b_{ij} ($i,j = 1,6$) в (5а, б) – упругие коэффициенты [1], $\omega_0^2 = \omega_1^2 \rho R^2 / b_{33}$, $u_i(x_j, x_j)$, $u_j(x_j, x_j)$ – амплитудные составляющие перемещений в отраженной волне, отнесенные к линейному размеру выработки R_i , определяющему форму I -го контура.

Волновые числа k_{pp}, k_{sp}, k_{ss} находятся из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} k_{pp} &= \omega_1 [(K_1 n_1 - K_3 n_1) / ((K_2^2 - K_1 K_3) n_1)]^{1/2}, \\ k_{sp} &= \omega_0 (b_{33} n_1^2 + 2b_{45} n_1 n_2 + b_{44} n_2^2)^{-1/2}, \\ k_{ss} &= \omega_1 [(K_1 n_1 - K_3 n_2) / ((K_2^2 - K_1 K_3) n_2)]^{1/2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$K_1 = b_{11} n_1^2 + 2b_{16} n_1 n_2 + b_{66} n_2^2, \quad K_2 = b_{16} n_1^2 + (b_{12} + b_{66}) n_1 n_2 + b_{26} n_2^2, \quad K_3 = b_{66} n_1^2 + 2b_{26} n_1 n_2 + b_{22} n_2^2.$$

Теперь поставим граничные условия и рассмотрим возможность решения первой основной краевой задачи, т.е. случая, когда контур выработок неподкреплен (свободен от нагрузок). Предположим, что контур выработок с радиусом R_i ($i = 1, L$) глубокого заложения свободен от воздействия внешних нагрузок. Тогда граничные и начальные условия на каждом из контуров Γ_i можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\sigma_{nn} + \sigma_{nn}^*)_{\Gamma_i} &= 0, \quad (\sigma_{nn} + \sigma_{nn}^*)_{\Gamma_i}|_{t=0} = 0; \\ (\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^*)_{\Gamma_i} &= 0, \quad (\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^*)_{\Gamma_i}|_{t=0} = 0; \end{aligned} \quad (7a)$$

$$(\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^*)_{\Gamma_i} = 0, \quad (\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^*)_{\Gamma_i}|_{t=0} = 0, \quad (\sigma_{rz} + \sigma_{rz}^*)_{\Gamma_i} = 0, \quad (\sigma_{rz} + \sigma_{rz}^*)_{\Gamma_i}|_{t=0} = 0. \quad (7b)$$

Здесь $\sigma_{nn}^*, \sigma_{yy}^*$ – нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1, n_2) , обусловленные падающей волной растяжения-сжатия, в плоскости поперечного сечения выработок; $\sigma_{zz}^*, \sigma_{rz}^*$ – касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1, n_2) , обусловленные падающей SH-волной сдвига; $\sigma_{nn}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$ – соответствующие амплитудные составляющие напряжений в отраженной волне.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка вида (5а) введем аффинное преобразование [2]:

$$\{x_i^{(0)}\} = \{\xi_i^{(0)}\}, \quad \{x_i^{(1)}\} = -M_1 \{\xi_i^{(0)}\} + M_2 \{\xi_i^{(1)}\}, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где $M = M_1 + iM_2$ – корень характеристического уравнения второй степени (причем $M_2 > 0$ – положительно определенная симметрическая матрица):

$$B_0 M^2 + B_1 M + B_2 = 0,$$

$$\text{т.е. } M_1 = -\frac{1}{2} B_0^{-1} B_1, \quad M_2 = \frac{1}{2} [4B_0^{-1} B_2 - (B_0^{-1} B_1)^2]^{1/2}.$$

Тогда выполнив соответствующие преобразования, дифференциальное уравнение (6а) сводится к уравнению Гельмгольца в координатах-векторах ($\{\xi_1^{(0)}\}, \{\xi_2^{(0)}\}$):

$$(\{\nabla_{\xi_1, \xi_2}^{(0)}\} + B_0^{-1} B_2) \{u, (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})\} = 0, \quad (9)$$

где $\{\nabla_{\xi_1, \xi_2}^{(0)}\}$ – вектор оператора Лапласа по векторам-переменным $\{\xi_1^{(0)}\}, \{\xi_2^{(0)}\}$.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (5б) вводится одномерное аффинное преобразование [4], которое также позволяет свести уравнение (5б) к уравнению Гельмгольца в координатах $(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$.

В общем случае, точки $\{O_i^{(0)}\}$, $i=1,2,3$, $I=\overline{1,L}$ являющиеся центрами локальных координатных систем ($\{x_{1i}^{(0)}\}$, $\{x_{2i}^{(0)}\}$) при преобразовании (8) перейдут в точки $\{O_g^{(0)}\}$. Их будем рассматривать как начало систем координат ($\{\xi_{1g}^{(0)}\}$, $\{\xi_{2g}^{(0)}\}$) с осями, ориентированными по осям координат ($\{\xi_1^{(0)}\}$, $\{\xi_2^{(0)}\}$) и полярных координат ($\{r_i^{(0)}\}$, $\{K_i^{(0)}\}$) с отчетом полярного угла $K_i^{(0)}$ от оси $\{O_g^{(0)}\}$ ($\xi_{1g}^{(0)}$).

В соответствии с принципом обобщенной суперпозиции [3] перемещения $\bar{u}_i = \{u_i\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ можно представить в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $A_n^{(0)}$, $i=1,2,3$ и цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода [2, 3]

$$u_i = \sum_{l=1}^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(0)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(0)} r_i^{(0)}) e^{i n K_i^{(0)}}, \quad n = -\infty, +\infty, \quad i=1,2,3. \quad (10)$$

Здесь, когда, например, упругие коэффициенты $b_{16}=0$, $b_{26}=0$, выражения для $\omega_0^{(0)}$ можно представить как $\omega_0^{(0)} = \omega_1 / \sqrt{b_{11}}$, $\omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{b_{66}}$, $\omega_0^{(3)} = \omega_3$.

Применяя теоремы сложения цилиндрических функций [2, 3], можно получить представления для $\bar{u}_i = \{u_i\}$, $i=1,2,3$ в любой из координатных систем ($r_i^{(0)}, K_i^{(0)}$):

$$\{u_i\} = \sum_{(n)} \{A_n^{(0)}\} \{H_n^{(1)}(\omega_0^{(0)} r_i^{(0)}) e^{i n K_i^{(0)}}\} + \{S_n^{(0)}\} \{J_n(\omega_0^{(0)} r_i^{(0)}) e^{i n K_i^{(0)}}\}, \quad (11)$$

$$(r_i^{(0)} < R_{iq}), \quad \{S_n^{(0)}\} = \sum_{q=1, (p)}^L \sum_{q \neq i} \{A_q^{(0)}\} \{H_{p-q}^{(1)}(\omega_0^{(0)} R_{iq}^{(0)}) e^{i(p-q)K_q^{(0)}}\},$$

$i=1,2,3$, $I=\overline{1,L}$, $(R_{iq}^{(0)}, K_{iq}^{(0)})$ – координаты точки $O_g^{(0)}$ в системе координат ($r_q^{(0)}, K_q^{(0)}$)

В выражениях (11) в качестве цилиндрической функции была взята функция Ханкеля 1-го рода, поскольку зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$, и решения поставленной задачи характеризуют волну, уходящую на бесконечность.

Соответствующие представлению перемещений $\bar{u}_i = \{u_i\}$, $i=1,2,3$ в виде (11) выражения для составляющих напряжений могут быть найдены путем подстановки формул для перемещений вида (11) в уравнения обобщенного закона Гука (аналогичные соотношения выведены для касательных напряжений в случае дифракции SH-волн [4]):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv \sigma_{11}, \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{22}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_{12}; \\ \sigma_j &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{(n)} A_n^{(0)} \omega_0^{(0)} [G_j^{(0)} H_{n-1}^{(1)}(\omega_0^{(0)} r_i^{(0)}) e^{i(n-1)K_i^{(0)}} - \bar{G}_j^{(0)} H_{n+1}^{(1)}(\omega_0^{(0)} r_i^{(0)}) e^{i(n+1)K_i^{(0)}}] + \\ &+ S_n^{(0)} \omega_0^{(0)} [G_j^{(0)} J_{n-1}(\omega_0^{(0)} r_i^{(0)}) e^{i(n-1)K_i^{(0)}} - \bar{G}_j^{(0)} J_{n+1}(\omega_0^{(0)} r_i^{(0)}) e^{i(n+1)K_i^{(0)}}], \quad (j=\overline{1,3}); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} G_j^{(0)} \\ j=\overline{1,3} \end{array} \right\} = \begin{cases} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{16} \end{bmatrix} + i \cdot (g_1^{(0)} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{16} \end{bmatrix} + g_1^{(2)} \begin{bmatrix} b_{16} \\ b_{26} \\ b_{66} \end{bmatrix}), \\ \begin{bmatrix} b_{26} \\ b_{66} \end{bmatrix} \end{cases}, \quad \left\{ \begin{array}{c} G_j^{(2)} \\ j=\overline{1,3} \end{array} \right\} = \begin{cases} \begin{bmatrix} b_{16} \\ b_{26} \\ b_{66} \end{bmatrix} + i \cdot (g_2^{(0)} \begin{bmatrix} b_{16} \\ b_{26} \\ b_{66} \end{bmatrix} + g_2^{(2)} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{26} \end{bmatrix}), \\ \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{26} \end{bmatrix} \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} G_k^{(3)} \\ k=\overline{1,2} \end{array} \right\} = \begin{cases} \begin{bmatrix} b_{33} \\ b_{43} \end{bmatrix} + i \cdot \mu_2^{-1} \cdot (\begin{bmatrix} b_{45} \\ b_{44} \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} b_{33} \\ b_{43} \end{bmatrix}), \\ \begin{bmatrix} b_{33} \\ b_{43} \end{bmatrix} \end{cases}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\{g_i^{(l)}\} = \text{diag}(M_2^{-1}M_1), \quad \{g_i^{(2)}\} = \text{diag}(M_2^{-1}), \quad l = 1, 2.$$

Здесь термин «*diag*» означает вектор из элементов главной диагонали соответствующей матрицы.

Теперь, используя выражение (2) можно найти соотношение для точек, лежащих на контурах Γ_l :

$$\{r_j^{(l)} e^{ik_j^{(l)}}\} = \{\eta_{10l}^{(l)}\} \{e^{i\theta_l^{(l)}}\} + \{\eta_{20l}^{(l)}\} \{e^{-i\theta_l^{(l)}}\} + \sum_{m=1}^{N_l} \{\eta_{2ml}^{(l)}\} \{e^{im\theta_l^{(l)}}\} + \{\eta_{1ml}^{(l)}\} \{e^{-im\theta_l^{(l)}}\}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \{\eta_{10l}^{(l)}\} &= a_0 \{R_l^{(l)} \rho_l^{(l)}\}, \quad \{\eta_{20l}^{(l)}\} = b_0 \{R_l^{(l)} \rho_l^{(l)}\}, \\ \{\eta_{1ml}^{(l)}\} &= a_0 \{R_l^{(l)} d_{ml}(\rho_l^{(l)})^{-m}\}, \quad \{\eta_{2ml}^{(l)}\} = b_0 \{R_l^{(l)} \bar{d}_{ml}(\rho_l^{(l)})^{-m}\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad m = \overline{1, N_l}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$a_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} M_2^{-1}(M_2 + iM_1 + E), & \text{если индекс } i = 1, 2, \\ \frac{\mu_1 + i\mu_1 + 1}{2\mu_1}, & \text{если индекс } i = 3; \end{cases} \quad b_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} M_2^{-1}(M_2 + iM_1 - E), & \text{если индекс } i = 1, 2, \\ \frac{\mu_2 + i\mu_2 - 1}{2\mu_2}, & \text{если индекс } i = 3. \end{cases}$$

Для представления комплексных потенциалов в выражениях (14) на контурах выработок применяется теорема сложения цилиндрических функций [3], которая требует выполнения следующих условий:

1. $|\eta_{10l}^{(l)}| > |\eta_{20l}^{(l)}|$.
2. $|\eta_{20l}^{(l)}| \|\eta_{21l}^{(l)}\| x \dots x \|\eta_{2N_l}^{(l)}\| \|\eta_{11l}^{(l)}\| x \dots x \|\eta_{1N_l}^{(l)}\| < |\eta_{10l}^{(l)}|$.

Первое условие (16) выполнено, поскольку матрица $M_2 > 0$ (положительно определенная), а параметр μ_2 больше нуля, т.е. $|a_0| > |b_0|$, отсюда $|\eta_{10l}^{(l)}| > |\eta_{20l}^{(l)}|$.

Второе условие выполняется, поскольку рассматриваемая задача является внешней, т.е. параметр $\rho > 1$, отсюда процесс - сходящийся и выполняется

$$|\eta_{20l}^{(l)}| \|\eta_{21l}^{(l)}\| \dots \|\eta_{2N_l}^{(l)}\| \|\eta_{11l}^{(l)}\| \dots \|\eta_{1N_l}^{(l)}\| \rho_l^{2(-1-2-3-\dots-N_l)} < a_0 R_l |\rho_l|.$$

Теперь, последовательно применяя теорему сложения цилиндрических функций и «метод возмущения формы» [3], можно записать представления комплексных потенциалов для точек на каждом из контуров Γ_l :

$$\{H_s^{(l)}(\omega_0^{(l)} r_l^{(l)}) e^{i\pi\kappa_l^{(l)}}\} = \sum_{(p)} \{Q_{np}^{(l)} e^{ip\theta_l^{(l)}}\}, \quad (17a)$$

$$\{J_s^{(l)}(\omega_0^{(l)} r_l^{(l)}) e^{i\pi\kappa_l^{(l)}}\} = \sum_{(p)} \{P_{np}^{(l)} e^{ip\theta_l^{(l)}}\}, \quad (17b)$$

где в случае некрутовых выработок:

$$\begin{aligned} Q_{np}^{(l)} &= \sum_{(v_{nq})} \dots \sum_{(v_1)} \sum_{(p_{nq})} \dots \sum_{(p_1)} \delta_{npq} H_{\frac{n+p+2}{2}}^{(l)}(\omega_0^{(l)} | \eta_{10l}^{(l)} |) \tilde{\eta}_{10l}^{\frac{(n+p+1)}{2}} \times \\ &\times J_{\frac{n-p+2}{2}}(\omega_0^{(l)} | \eta_{20l}^{(l)} |) \tilde{\eta}_{20l}^{\frac{(n-p+1)}{2}} \times \prod_{j=1}^{N_l} J_{(v_j - \bar{v}_j)}(\omega_0^{(l)} | \eta_{2,j}^{(l)} |) \tilde{\eta}_{2,j}^{(v_j - \bar{v}_j)} \times J_{\bar{v}_j}(\omega_0^{(l)} | \eta_{1,j}^{(l)} |) \tilde{\eta}_{1,j}^{(v_j)}, \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} P_{np}^{(l)} &= \sum_{(v_{nq})} \dots \sum_{(v_1)} \sum_{(p_{nq})} \dots \sum_{(p_1)} \delta_{npq} J_{\frac{n+p+2}{2}}(\omega_0^{(l)} | \eta_{10l}^{(l)} |) \tilde{\eta}_{10l}^{\frac{(n+p+1)}{2}} \times \\ &\times J_{\frac{n-p+2}{2}}(\omega_0^{(l)} | \eta_{20l}^{(l)} |) \tilde{\eta}_{20l}^{\frac{(n-p+1)}{2}} \times \prod_{j=1}^{N_l} J_{(v_j - \bar{v}_j)}(\omega_0^{(l)} | \eta_{2,j}^{(l)} |) \tilde{\eta}_{2,j}^{(v_j - \bar{v}_j)} \times J_{\bar{v}_j}(\omega_0^{(l)} | \eta_{1,j}^{(l)} |) \tilde{\eta}_{1,j}^{(\bar{v}_j)}; \end{aligned} \quad (18b)$$

$$\tilde{\eta}_{kpl}^{(i)} = \eta_{kpl}^{(i)} |\eta_{kpl}^{(i)}|^{-1}, \quad k=1,2; \quad j=0, \dots, N_i;$$

$$\tau_1 = \sum_{m=1}^{N_i} [(m+1)v_m - 2m\tilde{v}_m], \quad \tau_2 = \sum_{m=1}^{N_i} [(m-1)v_m - 2m\tilde{v}_m];$$

$$\delta_{apl} = 1, \quad \text{если } n+p-\tau_1 \text{ — четное число,}$$

$$\delta_{apl} = 0, \quad \text{если } n+p-\tau_1 \text{ — нечетное число.}$$

В случае круговых выработок:

$$Q_{apl}^{(i)} = \delta_{apl} H_{\frac{n+p}{2}}^{(1)}(\omega_0 | \eta_{10l}^{(i)} |) \tilde{\eta}_{10l}^{(i)} \left(\frac{n+p}{2} \right)^{(n+p)/2} J_{\frac{n-p}{2}}(\omega_0 | \eta_{20l}^{(i)} |) \tilde{\eta}_{20l}^{(i)} \left(\frac{n-p}{2} \right)^{(n-p)/2}; \quad (18a^*)$$

$$P_{apl}^{(i)} = \delta_{apl} J_{\frac{n+p}{2}}(\omega_0 | \eta_{10l}^{(i)} |) \tilde{\eta}_{10l}^{(i)} \left(\frac{n+p}{2} \right)^{(n+p)/2} J_{\frac{n-p}{2}}(\omega_0 | \eta_{20l}^{(i)} |) \tilde{\eta}_{20l}^{(i)} \left(\frac{n-p}{2} \right)^{(n-p)/2}; \quad (18b^*)$$

$$\tilde{\eta}_{kol}^{(i)} = \eta_{kol}^{(i)} |\eta_{kol}^{(i)}|^{-1}, \quad k=1,2;$$

$$\delta_{apl} = 1, \quad \text{если } n+p \text{ — четное число,}$$

$$\delta_{apl} = 0, \quad \text{если } n+p \text{ — нечетное число.}$$

Теперь перемещения u_i на контуре Γ_i представимы выражением

$$(\{u_i\})_{\Gamma_i} = \sum_{(n,p)} (\{A_{nl}^{(i)}\} \{Q_{apl}^{(i)}\} + \{S_{nl}^{(i)}\} \{P_{apl}^{(i)}\}) e^{ip\theta_i^{(i)}}. \quad (19)$$

Для удобства использования граничных условий применим разложение для нормальных и касательных напряжений на контуре на площадке с нормалью $(n_p, n_\gamma) = (\cos \tilde{\gamma}, \sin \tilde{\gamma})$, тогда граничные условия (7а) перепишутся в виде:

$$(|\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn} + |\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn}^*)_{\Gamma_i} = 0, \quad (|\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\gamma}} + |\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\gamma}}^*)_{\Gamma_i} = 0; \quad (20a)$$

$$(|\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{n3} + |\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{n3}^*)_{\Gamma_i} = 0, \quad (|\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{\tilde{\gamma}3} + |\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{\tilde{\gamma}3}^*)_{\Gamma_i} = 0. \quad (20b)$$

Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов в разложении (14) можно найти представления для напряжений (аналогичные представления для напряжений в случае дифракции SH-волны сдвига приведены в [4]):

$$(|\tilde{\omega}'_1|^2 \sigma_{nn})_{\Gamma_i} = \sum_{l=1}^2 \sum_{(n,p)} (A_{nl}^{(i)} \lambda_{apl}^{(i)} e^{ip\theta_i^{(i)}} + S_{nl}^{(i)} \psi_{apl}^{(i)} e^{ip\theta_i^{(i)}});$$

$$(|\tilde{\omega}'_1|^2 \sigma_{n\tilde{\gamma}})_{\Gamma_i} = \sum_{l=1}^2 \sum_{(n,p)} (A_{nl}^{(i)} \vartheta_{apl}^{(i)} e^{ip\theta_i^{(i)}} + S_{nl}^{(i)} \tau_{apl}^{(i)} e^{ip\theta_i^{(i)}}), \quad (21)$$

где для круговых и некруговых выработок получены соответствующие выражения:

$$\lambda_{apl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_i^2}{8} \{ \bar{E}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2}^{(i)} + E_1^{(i)} Q_{n-1,p+2}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1,p+2}^{(i)} + 2(E_3^{(i)} Q_{n-1,p}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p}^{(i)}) \};$$

$$\lambda_{apl}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} R_i^2}{8} \{ \bar{E}_1^{(i)} Q_{n-1,p-2,l}^{(i)} + E_1^{(i)} Q_{n-1,p+2,l}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} Q_{n+1,p-2,l}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1,p+2,l}^{(i)} + 2(E_3^{(i)} Q_{n-1,p,l}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p,l}^{(i)}) -$$

$$- 2 \sum_{m=1}^{N_i} m [\bar{d}_{ml} (E_3^{(i)} Q_{n-1,p-m-1,l}^{(i)} + E_1^{(i)} Q_{n-1,p-m+1,l}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1,p-m-1,l}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1,p-m+1,l}^{(i)}) + d_{ml} (E_3^{(i)} Q_{n-1,p+m+1,l}^{(i)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \bar{E}_1^{(i)} Q_{n-1, p+m-1, l}^{(i)} - I_3^{(i)} Q_{n+1, p+m+1, l}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} Q_{n+1, p+m-1, l}^{(i)})] + \sum_{m, k=1}^{N_l} m k [\bar{d}_{ml} \bar{d}_{kl} (E_1^{(i)} Q_{n-1, p-m-k, l}^{(i)} - I_1^{(i)} Q_{n+1, p-m-k, l}^{(i)}) + \\
 & + d_{ml} d_{kl} (\bar{E}_1^{(i)} Q_{n-1, p+m+k, l}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} Q_{n+1, p+m+k, l}^{(i)}) + \bar{d}_{ml} d_{kl} (\bar{E}_2^{(i)} Q_{n-1, p-m+k, l}^{(i)} - \bar{I}_2^{(i)} Q_{n+1, p-m+k, l}^{(i)}) + \\
 & + d_{ml} \bar{d}_{kl} (E_2^{(i)} Q_{n-1, p+m-k, l}^{(i)} - I_2^{(i)} Q_{n+1, p+m-k, l}^{(i)})] \}; \\
 \psi_{apl}^{(i)} & = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8} \{ \bar{E}_1^{(i)} P_{n-1, p-2}^{(i)} + E_1^{(i)} P_{n-1, p+2}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} P_{n+1, p-2}^{(i)} - I_1^{(i)} P_{n+1, p+2}^{(i)} \} + 2(E_3^{(i)} P_{n-1, p}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1, p}^{(i)}) \}; \\
 \psi_{apl}^{(i)} & = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8} \{ \bar{E}_1^{(i)} P_{n-1, p-2, l}^{(i)} + E_1^{(i)} P_{n-1, p+2, l}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} P_{n+1, p-2, l}^{(i)} - I_1^{(i)} P_{n+1, p+2, l}^{(i)} \} + 2(E_3^{(i)} P_{n-1, p, l}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1, p, l}^{(i)}) - \\
 & - 2 \sum_{m=1}^{N_l} m [\bar{d}_{ml} (E_3^{(i)} P_{n-1, p-m-1, l}^{(i)} + E_1^{(i)} P_{n-1, p-m+1, l}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1, p-m-1, l}^{(i)} - I_1^{(i)} P_{n+1, p-m+1, l}^{(i)}) + d_{ml} (E_3^{(i)} P_{n-1, p+m+1, l}^{(i)} + \\
 & + \bar{E}_1^{(i)} P_{n-1, p+m-1, l}^{(i)} - I_3^{(i)} P_{n+1, p+m+1, l}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} P_{n+1, p+m-1, l}^{(i)})] + \sum_{m, k=1}^{N_l} m k [\bar{d}_{ml} \bar{d}_{kl} (E_1^{(i)} P_{n-1, p-m-k, l}^{(i)} - I_1^{(i)} P_{n+1, p-m-k, l}^{(i)}) + \\
 & + d_{ml} d_{kl} (\bar{E}_1^{(i)} P_{n-1, p+m+k, l}^{(i)} - \bar{I}_1^{(i)} P_{n+1, p+m+k, l}^{(i)}) + \bar{d}_{ml} d_{kl} (\bar{E}_2^{(i)} P_{n-1, p-m+k, l}^{(i)} - \bar{I}_2^{(i)} P_{n+1, p-m+k, l}^{(i)}) + \\
 & + d_{ml} \bar{d}_{kl} (E_2^{(i)} P_{n-1, p+m-k, l}^{(i)} - I_2^{(i)} P_{n+1, p+m-k, l}^{(i)})] \}; \\
 \mathcal{G}_{apl}^{(i)} & = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8} \{ \bar{C}_1^{(i)} Q_{n-1, p-2}^{(i)} + C_1^{(i)} Q_{n-1, p+2}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} Q_{n+1, p-2}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1, p+2}^{(i)} \}; \\
 \mathcal{G}_{apl}^{(i)} & = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8} \{ \bar{C}_1^{(i)} Q_{n-1, p-2, l}^{(i)} + C_1^{(i)} Q_{n-1, p+2, l}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} Q_{n+1, p-2, l}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1, p+2, l}^{(i)} \} - 2 \sum_{m=1}^{N_l} m [\bar{d}_{ml} (C_1^{(i)} Q_{n-1, p-m+1, l}^{(i)} - \\
 & - D_1^{(i)} Q_{n+1, p-m+1, l}^{(i)}) + d_{ml} (\bar{C}_1^{(i)} Q_{n-1, p+m-1, l}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} Q_{n+1, p+m-1, l}^{(i)})] + \sum_{m, k=1}^{N_l} [\bar{d}_{ml} \bar{d}_{kl} (C_1^{(i)} Q_{n-1, p-m-k, l}^{(i)} - D_1^{(i)} Q_{n+1, p-m-k, l}^{(i)}) + \\
 & + d_{ml} d_{kl} (\bar{C}_1^{(i)} Q_{n-1, p+m+k, l}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} Q_{n+1, p+m+k, l}^{(i)}) + \bar{d}_{ml} d_{kl} (-C_2^{(i)} Q_{n-1, p-m+k, l}^{(i)} + D_2^{(i)} Q_{n+1, p-m+k, l}^{(i)}) + \\
 & + d_{ml} \bar{d}_{kl} (C_2^{(i)} Q_{n-1, p+m-k, l}^{(i)} - D_2^{(i)} Q_{n+1, p+m-k, l}^{(i)})] \}; \\
 \tau_{apl}^{(i)} & = \frac{\omega_0^{(i)} R_l^2}{8} \{ \bar{C}_1^{(i)} P_{n-1, p-2}^{(i)} + C_1^{(i)} P_{n-1, p+2}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} P_{n+1, p-2}^{(i)} - D_1^{(i)} P_{n+1, p+2}^{(i)} \}; \\
 E_1^{(i)} & = (G_1^{(i)} - G_2^{(i)}) + 2i \cdot G_3^{(i)}, \quad I_1^{(i)} = (\bar{G}_1^{(i)} - \bar{G}_2^{(i)}) + 2i \cdot \bar{G}_3^{(i)}, \\
 E_2^{(i)} & = (G_1^{(i)} + G_2^{(i)}) + 2i \cdot G_3^{(i)}, \quad I_2^{(i)} = (\bar{G}_1^{(i)} + \bar{G}_2^{(i)}) + 2i \cdot \bar{G}_3^{(i)}, \\
 E_3^{(i)} & = (G_1^{(i)} + G_2^{(i)}), \quad I_3^{(i)} = (\bar{G}_1^{(i)} + \bar{G}_2^{(i)}), \quad i = 1, 2; \\
 C_1^{(i)} & = 2G_3^{(i)} + i \cdot (G_2^{(i)} - G_1^{(i)}), \quad D_1^{(i)} = 2\bar{G}_3^{(i)} + i \cdot (\bar{G}_2^{(i)} - \bar{G}_1^{(i)}), \\
 C_2^{(i)} & = i \cdot (G_2^{(i)} - G_1^{(i)}), \quad D_2^{(i)} = i \cdot (\bar{G}_2^{(i)} - \bar{G}_1^{(i)}), \quad i = 1, 2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{npf}^{(i)} = & \frac{\omega_0^{(i)} R_i^2}{8} \{ \bar{C}_1^{(i)} P_{n-1,p-2,l}^{(i)} + C_1^{(i)} P_{n-1,p+2,l}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} P_{n+1,p-2,l}^{(i)} - D_1^{(i)} P_{n+1,p+2,l}^{(i)} - 2 \sum_{m=1}^{N_1} m [\bar{d}_{ml} (C_1^{(i)} P_{n-1,p-m+1,l}^{(i)} - \\ & - D_1^{(i)} P_{n+1,p-m+1,l}^{(i)}) + d_{ml} (\bar{C}_1^{(i)} P_{n-1,p+m-1,l}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} P_{n+1,p+m-1,l}^{(i)})] + \sum_{m,k=1}^{N_1} [\bar{d}_{ml} \bar{d}_{kl} (C_1^{(i)} P_{n-1,p-m-k,l}^{(i)} - D_1^{(i)} P_{n+1,p-m-k,l}^{(i)}) + \\ & + d_{ml} \bar{d}_{kl} (\bar{C}_1^{(i)} P_{n-1,p+m+k,l}^{(i)} - \bar{D}_1^{(i)} P_{n+1,p+m+k,l}^{(i)}) + \bar{d}_{ml} d_{kl} (-C_2^{(i)} P_{n-1,p-m+k,l}^{(i)} + D_2^{(i)} P_{n+1,p-m+k,l}^{(i)}) + \\ & + d_{ml} \bar{d}_{kl} (C_2^{(i)} P_{n-1,p+m-k,l}^{(i)} - D_2^{(i)} P_{n+1,p+m-k,l}^{(i)})] \}. \end{aligned}$$

Выражения для перемещений и напряжений на контурах выработок в падающей волне ($\{u_i^*\}_{\Gamma_i}$) ($i = 1, 2$) = ($\{u_{pp}, u_{sv}, u_{sh}\}_{\Gamma_i}$), ($(|\tilde{\omega}|^2 \sigma_{pp}^*)_{\Gamma_i}$), ($(|\tilde{\omega}|^2 \sigma_{sv}^*)_{\Gamma_i}$), ($(|\tilde{\omega}|^2 \sigma_{sh}^*)_{\Gamma_i}$), ($(|\tilde{\omega}| \sigma_{\gamma 3}^*)_{\Gamma_i}$), ($(|\tilde{\omega}| \sigma_{\gamma 3}^*)_{\Gamma_i}$) находим, применяя формулы разложений экспоненциальных функций в гармонические ряды. Не останавливаясь подробно на выводе формул, запишем окончательные выражения для перемещений и напряжений в падающей продольно-сдвиговой волне (выражения для перемещений и напряжений в падающей SH-волне сдвига приведены в [4]):

$$\begin{aligned} (u_i^*)_{\Gamma_i} = & U_i^* \sum_{(p)} Q_{pl}^{(i)} e^{ip\theta_l}, \quad (|\tilde{\omega}|^2 \sigma_{pp}^*)_{\Gamma_i} = i \frac{R_i^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{(p)} U_i^* \alpha_{pl}^{(i)} e^{ip\theta_l}, \\ (|\tilde{\omega}|^2 \sigma_{sv}^*)_{\Gamma_i} = & i \frac{R_i^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{(p)} U_i^* \beta_{pl}^{(i)} e^{ip\theta_l}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$Q_{pl}^{(i)} = \sum_{(\nu_1)} \dots \sum_{(\nu_{N_1})} \sum_{(\tilde{\nu}_1)} \dots \sum_{(\tilde{\nu}_{N_1})} [J_{p-\delta} (R k_{12}^{(i)}) e^{i(p-\delta)\delta_1} \prod_{m=1}^{N_1} (J_{\nu_m} (R_l d_{1ml} k_{12}^{(i)}) e^{i\nu_m \delta_2} \times J_{\tilde{\nu}_m} (R_l d_{2ml} k_{12}^{(i)}) e^{i\tilde{\nu}_m \delta_3})],$$

$$\delta = \sum_{m=1}^{N_1} m(\nu_m + \tilde{\nu}_m),$$

$$\alpha_{pl}^{(i)} = \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-2,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p+2,l}^{(i)} + 2 \operatorname{Re}(\bar{\chi}_1^{*(i)}) \cdot Q_{pl}^{(i)} + 2 \sum_{m=1}^{N_1} m [-\bar{d}_{ml} (\operatorname{Re}(\bar{\chi}_1^{*(i)}) Q_{p-m-1,l}^{(i)} + \chi_1^{*(i)} Q_{p-m+1,l}^{(i)}) -$$

$$-d_{ml} (\operatorname{Re}(\bar{\chi}_1^{*(i)}) Q_{p+m+1,l}^{(i)} + \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m-1,l}^{(i)})] + \sum_{m,k=1}^{N_1} m k [\bar{d}_{ml} \bar{d}_{kl} \cdot \chi_1^{*(i)} Q_{p-m-k,l}^{(i)} + d_{ml} d_{kl} \cdot \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m+k,l}^{(i)} + \\ + \bar{d}_{ml} d_{kl} \cdot \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p-m+k,l}^{(i)} + d_{ml} \bar{d}_{kl} \cdot \bar{\chi}_1^{*(i)} Q_{p+m-k,l}^{(i)}], \quad i = 1, 2;$$

$$\beta_{pl}^{(i)} = -i \cdot \operatorname{Im}(\chi_2^{*(i)}) \cdot (Q_{p-2,l}^{(i)} - Q_{p+2,l}^{(i)}) - 2 \sum_{m=1}^{N_1} m [\bar{d}_{ml} \cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m+1,l}^{(i)} + d_{ml} \cdot \bar{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m-1,l}^{(i)}] +$$

$$+ \sum_{m,k=1}^{N_1} m k [\bar{d}_{ml} \bar{d}_{kl} \cdot \chi_2^{*(i)} Q_{p-m-k,l}^{(i)} + d_{ml} d_{kl} \cdot \bar{\chi}_2^{*(i)} Q_{p+m+k,l}^{(i)} -$$

$$- \bar{d}_{ml} d_{kl} \cdot i \cdot \operatorname{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p-m+k,l}^{(i)} + d_{ml} \bar{d}_{kl} \cdot i \cdot \operatorname{Im}(\chi_2^{*(i)}) Q_{p+m-k,l}^{(i)}], \quad i = 1, 2;$$

$$\chi_1^{*(1)} = (b_{11} - b_{12}) k_1^{(1)} + (b_{16} - b_{25}) k_2^{(1)} + 2i \cdot (b_{16} k_1^{(1)} + b_{66} k_2^{(1)});$$

$$\chi_1^{*(2)} = (b_{16} - b_{25}) k_1^{(2)} + (b_{12} - b_{22}) k_2^{(2)} + 2i \cdot (b_{66} k_1^{(2)} + b_{26} k_2^{(2)});$$

$$\bar{\chi}_1^{*(1)} = (b_{11} + b_{12}) k_1^{(1)} + (b_{16} + b_{26}) k_2^{(1)} + 2i \cdot (b_{16} k_1^{(1)} + b_{66} k_2^{(1)});$$

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_1^{*(2)} &= (b_{16} + b_{26})k_1^{(2)} + (b_{12} + b_{22})k_2^{(2)} + 2i \cdot (b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)}); \\ \chi_2^{*(1)} &= 2(b_{16}k_1^{(1)} + b_{66}k_2^{(1)}) + i \cdot [(b_{12} - b_{11})k_1^{(1)} + (b_{26} - b_{16})k_2^{(1)}]; \\ \chi_2^{*(2)} &= 2(b_{66}k_1^{(2)} + b_{26}k_2^{(2)}) + i \cdot [(b_{26} - b_{16})k_1^{(2)} + (b_{22} - b_{12})k_2^{(2)}];\end{aligned}$$

$$e^{i\delta_1} = (k_2^{(1)} + ik_1^{(1)})k_{12}^{(1)-1}, \quad e^{i\delta_2} = (-k_2^{(1)} + ik_1^{(1)})k_{12}^{(1)-1}, \quad e^{i\delta_3} = (k_1^{(1)} + ik_2^{(1)})k_{12}^{(1)-1}, \quad k_{12}^{(1)} = (k_1^{(1)2} + k_2^{(1)2})^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь для удовлетворения граничным условиям (20а,б) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $e^{iP\theta}$. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_{nl}^{(i)}, s_{nl}^{(i)}$ вида (приводятся выражения для РР-, SV- волн):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 \sum_{(n,p)} (A_{nl}^{(i)} \lambda_{npf}^{(i)} + s_{nl}^{(i)} \psi_{npf}^{(i)}) &= -i \frac{R_l^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{(p)} U_i^* \alpha_{pf}^{(i)}; \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{(n,p)} (A_{nl}^{(i)} \vartheta_{npf}^{(i)} + s_{nl}^{(i)} \tau_{npf}^{(i)}) &= -i \frac{R_l^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{(p)} U_i^* \beta_{pf}^{(i)}.\end{aligned}\quad (23)$$

Данная система решается методом редукции. В настоящий момент нет строгого обоснования подобного подхода к решению такой системы, поэтому сходимость решения может быть показана численно, ввиду сложности аналитического обоснования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брысанов Ж.С., Айтматов Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. Алма-Ата: Наука, 1980. 213 с.
2. Космодамянский А.С., Сторожев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. Киев: Наукова думка, 1985. 178 с.
3. Гуль А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 310 с.
4. Atymtayeva L., Masanov Zh., Yagaliyeva B., Myrzakhmetova G. Stationary diffraction of elastic SH-waves onto mutually influencing cavities of arbitrary structure and deep lying in transropic massif// Proceedings of the 3rd IASME / WSEAS International Conference on CONTINUUM MECHANICS (CM'08). Cambridge, UK, February 23-25, 2008. P. 5-9.

Резюме

Макала жазық және антижазық деформация жағдайында серпімді бойлай-жылжу толқындары стационарлық дифракциясында, бір-біріне катысты кез келген орналасырылулар және кез келген профилді бекітілген кәзбалар топтамасы бар, изотропияның көлбеке жазыктықтарымен серпімді транстронты тау жынысының динамикалық кернесулік-деформациялық күйін зерттеуге арналған. Жұмыста бекітілген кәзбалары бар анизотропиялық көлбекеліністі тау жынысының динамикасы турали кейбір есептер кластиарын қатал шешімге келтірілген, комплексті айнымалылар функциясы теориясы едісі және айнымалыларды болу едісі, цилиндрилік функцияны жіктеу теориясы, толқын дифракциясы теориясы, деформацияланбаған катты демелер механикасы теориясы аппаратын колданылған, аналитикалық өрнектер алынған.

Summary

"Research of dynamics of anisotropic multilinked massif at condition of a stationary diffraction of elastic waves for solution of the first basic task of mechanics" paper (the author Atymtayeva L.B.) is devoted to the defining of dynamic stress-strain condition of elastic transropic massif with inclined plane of isotropy, which contains a series of unsupported mine roadways with arbitrary contour and an arbitrary location relative to each other at the case of stationary diffraction of elastic longitudinal and shear waves in state of plane and antiplane deformation. The author presents an exact solution of certain classes of problems on the dynamics of anisotropic multilinked massif with unsupported mine roadways, analytical expressions with using of the theory of solid mechanics, theory of wave diffraction, theory of cylindrical function decomposition, variables separation methods and the theory of complex variables functions were obtained.