

Л. Б. АТЫМТАЕВА

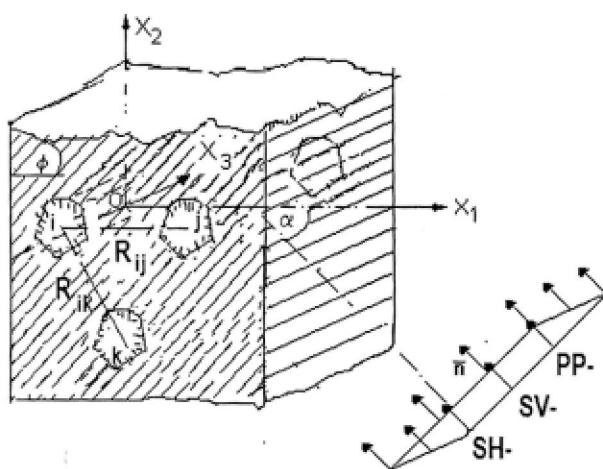
ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНОГО МНОГОСВЯЗНОГО МАССИВА ПРИ СТАЦИОНАРНОЙ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН ПРИ РЕШЕНИИ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

(Представлена академиком НАН РК Ж. Ж. Байгунчековым)

Работа посвящена исследованию динамического напряженно-деформированного состояния упругого транстропного массива с наклонной плоскостью изотропии, содержащем выработки произвольного профиля и произвольного расположения друг относительно друга, закрепленных абсолютно жесткой обделкой, при стационарной дифракции упругих продольно-сдвиговых (PP-, SV-, SH-) волн в случае плоской и антипластической деформации. В работе показано строгое решение классов задач о динамике анизотропного многосвязного массива, с закрепленными недеформированной крепью выработками, получены аналитические выражения, с использованием аппарата теории механики деформируемого твердого тела, теории дифракции волн, теории цилиндрических функций, методов разделения переменных, методов возмущения формы, методов теории функций комплексных переменных.

Предположим, что в анизотропном массиве, моделируемым трансверсально-изотропной средой с наклонной плоскостью изотропии, проведены l , $l = \overline{1, L}$ горизонтальных выработок,

закрепленных абсолютно жесткой обделкой, с осью, параллельной оси Ox_3 в системе координат $Ox_1x_2x_3$, где ось Ox_2 направлена вертикально вверх, а оси Ox_1 и Ox_3 – соответственно



горизонтально вкrest и по простиранию плоскости изотропии (см. рисунок). Предположим, что $S_l (l = \overline{1, L})$ области поперечного сечения выработок, а $S_0 = \mathbb{R}^2 - \bigcup_{l=1}^L S_l$ – область поперечно-сечения многосвязной среды (транстроного массива). С центром каждой выработки связем локальную безразмерную координатную систему $(x_{1l}, x_{2l}) (l = \overline{1, L}), (x_{10}, x_{20}) = (x_1/R, x_2/R)$, R – линейный размер массива. Горизонтальные не-круговые выработки радиуса $R_l (l = \overline{1, L})$ проведены вдоль оси Ox_3 и имеют поперечное сечение с контуром Γ_l (рис.). Будем считать, что внешность единичного круга с помощью функции $\tilde{\omega}(\zeta_l)$ отображается на внешность контура Γ_l , границы области $S_l (l = \overline{1, L})$:

$$z_l = \tilde{\omega}(\zeta_l) = R_l(\zeta_l + \sum_{m=1}^{N_l} d_{ml} \zeta_l^{-m}), z_l = x_{1l} + ix_{2l}, \\ \zeta_l = \rho_l e^{i\theta_l}, d_{ml} = d_{1ml} + id_{2ml}.$$

Уравнения обобщенного закона Гука для такого транстроного массива с наклоненной под углом φ к горизонту плоскостью изотропии записываются в виде:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},$$

где $\{\sigma\}^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{12}]$;

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{12}];$$

$$[D] = [b_{ij}], (i, j = \overline{1, 6}).$$

Здесь коэффициенты b_{ij} зависят от упругих постоянных массива E_k, ν_k , ($k = 1, 2$), G_2 и угла наклона плоскости изотропии φ [1].

Предполагается, что в транстроном массиве в плоскости поперечного сечения выработок вдоль направления, задаваемого единичным вектором $\bar{n} = (n_1, n_2)$, падает плоская стационарная упругая гармоническая волна, которая может быть разбита на квазипродольную волну и две квазипоперечные волны. Фронт волны параллелен осям выработок, сама волна поляризована в плоскости поперечного сечения выработок в случае рассмотрения PP-, SV-волн растяжения-сжатия и параллельно оси Ox_3 в случае SH-волн сдвига. Вид волны может быть представлен следующим выражением $\bar{u} = \bar{u}^* e^{-i\omega t}$, где \bar{u}^* – амплитуда волны, описываемая выражениями в случае разделения волн

$$u_1^* = U_1^* \exp[i(k_1^{(1)} x_1 + k_2^{(1)} x_2)], \\ u_2^* = U_2^* \exp[i(k_1^{(2)} x_1 + k_2^{(2)} x_2)], \\ u_3^* = U_3^* \exp[i(k_1^{(3)} x_1 + k_2^{(3)} x_2)],$$

ω – частота волны, $(\bar{k}^{(1)}, \bar{k}^{(2)}, \bar{k}^{(3)})$ – волновой вектор, n_1, n_2 – направляющие косинусы угла падения волны α -угла между осью Ox_1 и вектором \bar{n} (см. рис. 1).

Определимся с граничными условиями, в нашем случае, рассматривается решение второй основной задачи, когда выработки подкреплены абсолютно-жесткой крепью. Подкрепление обделками подземных выработок, транспортных тоннелей зависит от горно-геологического строения и физико-механических свойств слагающих горных массивов. Рассмотрение выработок с подкреплением произвольного профиля и глубокого заложения для решения динамических контактных задач в транстроном массиве позволяет оптимально их спроектировать, определять и улучшать их эксплуатационные качества. Граничные условия на контуре Γ_p жестко закрепленной l -ой выработки, могут быть записаны в виде

$$(u_i + u_i^*)|_{\Gamma_l} = 0, i = 1, 2, 3, (u_i + u_i^*)|_{t=0} = 0. \quad (1)$$

В случае падения PP-, SV- волн растяжения-сжатия и сдвига в рассмотрение берется состояние плоской деформации, и дифракционное поле характеризуется составляющими перемещений в плоскости поперечного сечения выработок $\bar{u} = (u_1, u_2)$. Тогда для выработок глубокого заложения можно записать следующие уравнения в матричном виде

$$(B_0 \partial_1^2 + B_1 \partial_1 \partial_2 + B_2 \partial_2^2 + B_3) \bar{u}_p = 0, \quad (2a)$$

где $\bar{u}_p = \{u_1, u_2\}$, $B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{16} \\ b_{16} & b_{66} \end{pmatrix}$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2b_{16} & b_{12} + b_{66} \\ b_{12} + b_{66} & 2b_{26} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{66} & b_{26} \\ b_{26} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 \end{pmatrix}.$$

При падении SH-волн сдвига рассматривается антиплоская деформация выработок, а дифракционное поле в этом случае характеризуется амплитудными составляющими перемещений $u_3(x_1, x_2)$ в осевом направлении. Рассматривая краевую задачу, учитываем, что все составляющие перемещений, кроме u_3 , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x_1, x_2) в плоскости поперечного сечения выработок. В этом случае остается рассмотреть уравнение

$$\{\partial_1^2 + 2(b_{45}/b_{55})\partial_1 \partial_2 + (b_{44}/b_{55})\partial_2^2 + \omega_0^2\} u_3(x_1, x_2) = 0, \quad (2b)$$

Коэффициенты b_{ij} ($i, j = 1, 6$) в (2а, б) – упругие коэффициенты [1], $\omega_0^2 = \omega_1^2 \rho R^2 / b_{55}$, $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$, $u_3(x_1, x_2)$ – амплитудные составляющие перемещений в отраженной волне, отнесенные к линейному размеру выработки R_l , определяющему форму l -го контура.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (2а, б) с граничными и начальными условиями (1), вводится аффинное преобразование вида

$$\{x_i^{(i)}\} = \{\xi_1^{(i)}\}, \{x_2^{(i)}\} = -M_1 \{\xi_1^{(i)}\} + M_2 \{\xi_2^{(i)}\}, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где $M = M_1 + iM_2$ – корень характеристического уравнения второй степени (причем $M_2 > 0$ – положительно определенная симметрическая матрица). Аналогичное аффинное преобразование вводится отдельно для задачи дифракции SH-волн сдвига [2].

Теперь соответствующие дифференциальные уравнения (2а, б) сводятся к уравнению Гельмгольца в координатах $(\{\xi_1^{(i)}\}, \{\xi_2^{(i)}\})$.

Далее в соответствии с принципом обобщенной суперпозиции упругие перемещения u_i [3, 4], являясь решениями уравнения (2а или 2б), выражаются в виде бесконечного ряда относительно неизвестных коэффициентов $B_{nl}^{(i)}$ и цилиндрических функций Бесселя и Ханкеля 1-го рода

$$\{u_i\} = \sum_{(n)} \{B_{nl}^{(i)}\} \{H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}}\} + \{t_{nl}^{(i)}\} \{J_n(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}}\},$$

Здесь

$$(r_l^{(i)} < R_{lq}^{(i)}),$$

$$\{t_{nl}^{(i)}\} = \sum_{q=1, (p)}^L \sum_{q \neq l} \{B_{pq}^{(i)}\} \{H_{p-n}^{(1)}(\omega_0^{(i)} R_{lq}^{(i)}) e^{i(p-n)\kappa_{lq}^{(i)}}\},$$

$(R_{lq}^{(i)}, \kappa_{lq}^{(i)})$ – координаты точки $O_{\xi_l}^{(i)}$ в системе координат $(r_q^{(i)}, \kappa_q^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$, $l = \overline{1, L}$.

Пользуясь выражениями для точек, лежащих на контуре Γ_l [2], а также применяя теорему сложения цилиндрических функций [3, 4], перемещения на контуре преобразуются к виду:

$$\{(u_i)\}_{\Gamma_l} = \sum_{(n, p)} (\{B_{nl}^{(i)}\} \{Q_{np}^{(i)}\} + \{t_{nl}^{(i)}\} \{P_{np}^{(i)}\}) e^{ip\theta_l^{(i)}},$$

где комплексные потенциалы $Q_{np}^{(i)}$, $P_{np}^{(i)}$ вычисляются аналогично формулам [2].

Представления для перемещений на l -ом контуре в падающей волне $(u_i^*)_{\Gamma_l}$ находятся из следующих выражений: $(u_i^*)_{\Gamma_l} = U_i^* \sum_{(p)} Q_{pl}^{(i)} e^{ip\theta_l}$ с комплексной функцией $Q_{pl}^{(i)}$ [2].

Для удовлетворения краевым условиям (1) применим метод приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $e^{ip\theta_l}$. С помощью данного метода после соответствующих подстановок можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $B_{nl}^{(i)}$, $t_{nl}^{(i)}$, решаемую методом редукции, в виде

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{(n,p)} (B_{nl}^{(i)} \lambda_{npl}^{(i)} + t_{nl}^{(i)} \psi_{npl}^{(i)}) = -i \frac{R_l^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{(p)} U_i^* \alpha_{pl}^{(i)};$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{(n,p)} (B_{nl}^{(i)} \vartheta_{npl}^{(i)} + t_{nl}^{(i)} \tau_{npl}^{(i)}) = -i \frac{R_l^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{(p)} U_i^* \beta_{pl}^{(i)};$$

$$\sum_{(n,p)} (B_{nl}^{(3)} \lambda_{npl}^{(3)} + t_{nl}^{(3)} \psi_{npl}^{(3)}) = -(\sqrt{2}) R_l U_3^* \sum_{(p)} \alpha_{pl}^{(3)};$$

$$\sum_{(n,p)} (B_{nl}^{(3)} \vartheta_{npl}^{(3)} + t_{nl}^{(3)} \tau_{npl}^{(3)}) = -(\sqrt{2}) R_l U_3^* \sum_{(p)} \beta_{pl}^{(3)}.$$

Далее соответствующие полученным выражениям для перемещений соотношения для напряжений могут быть вычислены по аналогии с исследованиями в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерсанов Ж.С., Аттамаев Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. Алма-Ата: Наука, 1980. 213 с.

2. Atymtayeva L., Masanov Zh., Yagaliyeva B., Myrzakhanmetova G. Stationary diffraction of elastic SH-waves onto mutually influencing cavities of arbitrary structure and deep lying in transtropic massif // Proceedings of the 3rd IASME / WSEAS International Conference on CONTINUUM MECHANICS (CM'08). Cambridge, UK, February 23-25, 2008. P. 5-9.

3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 310 с.

4. Космодамианский А.С., Сторожев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. Киев: Наукова думка, 1985. 178 с.

Резюме

Мақала стационарлық дифракциясында, абсолютті катты қаптамамен бекітілген, бір-біріне қатысы кез келген орналастырыулар мен кез келген профилді қазбалары бар, изотропияның көлбеу жазықтықтарымен серпімді транстропты тау жынысының динамикалық кернеуілк-деформациялық күйін зерттеуіне арналған. Жұмыста комплексті айнымалылар функциялар теориясы әдісі, үйіткү формасы әдісі, айнымалыларды бөлу әдісі, цилиндрлік функциялар теориясы, толқындар дифракциясы теориясы, деформацияланатын қатты денелер механикасы теориясы аппаратын қолданумен, аналитикалық өрнектері алғынған, қазбалары деформацияланбаған бекітілгенде, анизотроптық көп байланысты тау жынысы динамикасы туралы есептер классы катал шешімде көрсетілген.

Summary

The article is devoted to defining of dynamic stress-strain condition of elastic transtropic massif with inclined plane of isotropy, which contains a series of mine roadways with arbitrary contour and an arbitrary location supported by absolutely rigid lining relative to each other at the case of stationary diffraction of elastic longitudinal and shear PP-, SV-, SH-waves in state of plane and antiplane deformation. The author presents an exact solution of certain classes of problems on the dynamics of anisotropic multilinked massif with mine roadways supported by underformable lining, analytical expressions with using of the theory of solid mechanics, theory of wave diffraction, theory of cylindrical function decomposition, variables separation methods, theory of form perturbation and the theory of complex variables functions were obtained.

УДК 622.011.4; 622.023+539.3

*Институт механики и машиноведения
им. У.А. Джолдасбекова, г. Алматы Поступила 02.06.10г.*