УДК 517.956

О.А. АУЕЛБЕКОВ

ВЛИЯНИЕ КОМПЛЕКСНО ЗНАЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

И+ссследуется влияние комплексно значного коэффициента на корректность задачи и сравнение с результатами аналогичной задачи с действительно-значными коэффициентами.

Рассмотрим в области $D = (t > 0, x > 0, y \in R)$ систему уравнений тепло и массопереноса с постоянной матрицей

$$V_t = A\Delta V,$$

где Δ - оператор Лапласа, A - постоянная матрица размерности 2×2.

Система параболична по Петровскому и ее можно свести к каноническому виду [1]

$$U_t = E_\lambda \Delta U, \qquad (1)$$

в котором E_λ принимает одну из трех форм

$$E_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

здесь λ - корни векового уравнения $\det\|A - \lambda I\| = 0, U = (u, v)^T$

Ставим задачу:

найти решение системы (1), удовлетворяющее однородным начальным данным

$$u(0, x, y) = 0, x > 0, y \in R \qquad (2)$$

и неоднородным граничным условиям при $x = 0$

$$B_1 U_x + B_2 U_y + B_3 U = \varphi(t, y), t > 0, y \in R, U = (u, v) \qquad (3)$$

Для данной задачи имеет смысл проверить условия дополнительности, если оно верно, то задача однозначно разрешима, если нет, то она некорректна.

В работе [1], сформулированная задача в зависимости от рангов граничных матриц B_j разделена на четыре типа:

I – первая краевая задача;

II – задача с нормальной производной;

III – задача с наклонной производной;

IV – задача с касательной производной.

Ранее в статье [2] исследовался вопрос корректности названных задач, с вещественными матрицами E_λ.

Ниже анализируем тот же вопрос, когда задана форма

$$E_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

где $\lambda = a + ib, \quad a > 0, \quad b > 0$;

Очевидно, данный случай является обобщением вещественного варианта корней $\lambda_1 = a$ и $\lambda_2 = b\ (0 < a < b)$, рассмотренного в [2]. Значит в соответствующих выражениях число "a" надо заменить на $a + ib$, а число "b" на $a - ib$. Например, теперь будут

$$\lambda_a = \sqrt{\frac{p}{a+ib} + \omega^2},\ \lambda_b = \sqrt{\frac{p}{a-ib} + \omega^2},$$

где p и ω - параметры интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по y. Исследование ведется по методике работ [2,3]. Очевидно, влияние должно обнаружится, у тех задач, где присутствуют нормальные производные.

Итак, далее, перепроверим "нули" детерминантов систем линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.), отвечающих типовым задачам. В задачах I и II.1 с.л.а.у. остаются без изменения, тем самым, результаты прежние т.е. эти задачи однозначно разрешимы (стандартные задачи).

К задаче II.2 с граничным условием

$$\alpha_0 u_x + \alpha_1 v_x + \alpha_2 u + \alpha_3 v = \varphi_1, \beta_0 u + \beta_1 v = \varphi_2 \qquad (3.\text{II})$$

где rang B_1 =1, rang (B_1,B_2)=2.

Применив методику [3], получим иррациональное уравнение

$$\sigma\lambda_b = \lambda_a, \quad \sigma = \frac{\alpha_1\beta_0}{\alpha_0\beta_1}.$$

Сперва данное равенство (обе части его) возводим два раза в квадрат, а затем, представив в нем параметр " p " в виде $p = p_0 + ip_1$, отделяем реальную часть от мнимой, тогда придем к системе двух уравнении

$$\begin{cases} a(1-\sigma^2)p_1 = b(1+\sigma^2)p_0 \\ a(1-\sigma^2)p_0 + b(1+\sigma^2)p_1 = (\sigma^2-1)(a^2+b^2)\omega^2. \end{cases} \quad (4')$$

Из первого найти значение $p_1 = \left[b\left(\frac{1+\sigma^2}{a(1-\sigma^2)}\right)\right]p_0$, где $\sigma^2 \neq 1$ подставим во второе и в итоге, имеем

$$p_1 = -a\left(a^2+b^2\right)\left(\sigma^2-1\right)^2\omega^2 / \left[a^2\left(1-\sigma^2\right)^2 + \right.$$
$$\left. + b^2\left(1+\sigma^2\right)^2\right] < 0 \cdot$$

Следовательно, имеет место условие дополнительности, которое в вещественном варианте нарушалось.

Утверждение 1. Задача (1), (2), (3.III), в силу комплексно-значности однозначности коэффициентов λ и $\bar{\lambda}$ при операторе Лапласа, становится однозначно разрешимой.

В типе III.2. т.е. в задаче с граничным условием

$$\alpha_0 u_x + \alpha_1 v_x + \alpha_2 u_y +$$
$$+ \alpha_3 v_y + b_2 u + b_3 v = \varphi_1, \beta_0 u + \beta_1 v = \varphi_2 \quad (3.\text{III})$$

Придем к иррациональному уравнению

$$\sigma\lambda_b = \lambda_a - \omega e,$$

где $e = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_0}{\alpha_0\beta_1}, \quad \sigma \neq 1, \quad \omega \neq 0$.

После двух "квадрировании" и разделения реальной и мнимой части, получаем систему

$$\begin{cases} C_0C_1\left(p_0^2 - p_1^2\right) + C^- p_0 p_1 + (C_1\alpha - \gamma)p_0 + (C_0 d + \alpha)p_1 = 0, \\ C^-\left(p_0^2 - p_1^2\right) + 4C_0C_1 p_0 p_1 - 2(C_0 d - \alpha)p_0 + (C_1 d + \gamma)p_1 + \beta = 0, \end{cases}$$

где введены обозначения $C^{\pm} = C_0^2 \pm C_1^2$,

$$C_0 = a\left(\sigma^2 - 1\right), \quad C_1 = b\left(\sigma^2 + 1\right) > 0,$$
$$d = \left(a^2+b^2\right)\left(\sigma^2+1+\varepsilon^2\right) > 0, \alpha = 2ae^2 > 0,$$
$$\gamma = 2be^2 > 0, \beta = 4\left(a^2+b^2\right)e^2 > 0.$$

Проделав элементарные преобразования, системе дадим иную форму

$$\begin{cases} C^{+2}\left(p_0^2 - p_1^2\right) + 2\nu p_0 + 2\mu p_1 - C^-\beta = 0, \\ C^{+2}\left(p_0^2 - p_1^2\right) + \varepsilon p_0 + \theta p_1 + C_0C_1\beta = 0, \end{cases}$$

где

$$\nu = C^+C_0 d - 2C_0C_1\gamma - C^-\alpha,$$
$$\mu = C^+C_0 d + 2C_0C_1\alpha - C^-\gamma,$$
$$\varepsilon = -C^+C_1 d + 2C_0C_1\alpha - C^-\gamma,$$
$$\theta = C^+C_0 d + 2C_0C_1\gamma - C^-\alpha,$$

Из второго уравнения находим $p_1 = \frac{-\left(\varepsilon p_0 + C_0C_1\beta\right)}{\left(C^{+2}P_0 + \theta\right)}$ и подставим его в первое, тогда получим многочлен четвертой степени

$$p_4(p_0) = C^{+4}p_0^4 + 4C^{+3}\omega^2 C_0 d p_0^3 +$$
$$+ a_2 C^{+2}\omega^4 p_0^2 + 2a_3\omega^6 p_0 - a_4\beta\omega^8 = 0,$$

здесь

$$a_2 = \left(C^+ + 4C_0^2\right)d^2 + \left(C_0\alpha + C_1\gamma\right)d - 3\left(\alpha^2 + \gamma^2\right) - C^-\beta,$$
$$a_3 = \left(C^{+2}\alpha + C^+C^-C_0 d + 2C_0^2C_1\alpha\right)\beta,$$
$$a_4 = C_0^2C_1\beta + \left(C_0\alpha + \alpha\right)\theta.$$

Как подсказывает вид коэффициентов, искомый корень представим так

$$p_0 = \frac{\delta}{C^+}\omega^2, \ \delta > 0,$$

Тогда имеем новый полином

$$p_4(\delta) = \delta^4 + 4C_0 d\delta^3 + a_2\delta^2 + 2\frac{a_3}{C^+}\delta - a_4\beta = 0.$$

Как известно, для того чтобы существовал корень $\delta > 0$, достаточно, чтобы было $a_4 > 0$.

И его преобразуем

$$a_4 = C_0^2\left[(C_0 d + \alpha)^2 + (C_1 d + \gamma)^2 + C_1\beta\right] - 4\alpha^2 =$$
$$= C_0^2\left[(C_1 d + \gamma)^2 + C_1\beta\right] - \left[C_0^2(C_1 d + \alpha)^2 - 4\alpha^2\right]$$

Нужное нам неравенство $a_4 > 0$ справедливо, в частности, когда

$$C_0 > 2\left(\sigma^2 > 1 + \frac{2}{\alpha}\right). \quad (5)$$

Таким образом, находим корень

$$p = \frac{\delta}{C^+}\omega^2 + i\frac{\frac{\varepsilon\delta}{C^+}\omega^2 + C_0C_1\beta}{C^+\omega^2\delta + \theta},$$

Где δ - положительный корень полинома $p_4(\delta)$.

Утверждение 2. Задача III.2. остается некорректной при выполнении условия (5)

Таким образом:

1^0. В задачах I, II.1 и IV результаты как при вещественном варианте, а именно, первая и третья краевые задачи однозначно разрешимы, а для задач типа IV нарушаются условия дополнительности.

2^0. Некорректная задача II.2 переходит к классу корректно поставленной задачи.

3^0. Задача III.2 остается некорректной, но с другим условием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Базарбаева С.Е.* О разрешимости смешанных задач для системы дифференциальных уравнений тепло – и массообмена: Дисс. канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1982, 144 с.

2. *Темирболат С.Е., Ауелбеков О.А.* Многомерные задачи тепло – и массообмена // Вестник КазНУ. – Алматы. – 2008.-№2.-С.45-49.

3. *Темирболат С.Е.* Конструирование и решение некорректных краевых задач. – Алматы: Қазақ университеті, 2003. – 128с.

Резюме

Комплекс мәнді коэффициенттердің есептің қисындылығына ықпалы зерттеледі және нақты мәнді коэффициенттерге қатысты нәтижелермен салыстырылады.

Summary

In article We research the effect of complex-valued coefficients to correct the problem and compare results with a similar problem with real-valued coefficients.