О.А. АУЕЛБЕКОВ, С.Е. ТЕМИРБОЛАТ, Н.А. ОРШУБЕКОВ

ЗАДАЧИ ТЕПЛО – И МАССОПЕРЕНОСА С КАСАТЕЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

(Представлена академиком НАН РК Н.К. Блиевым)

В статье изучается один класс некорректных двумерных задач для системы параболических уравнений по методике, разработанной одним из авторов. В результате доказаны условная однозначная разрешимость таких задач.

1°. Постановка задачи и ее типизация

Рассмотрим в области $D=(t>0, x>0, y\in R)$ систему уравнений тепло – и массопереноса с постоянной матрицей A

$$u_t = A\Delta u,\ \ A=(a_{ij}),\ \ i,j=1,2\,.$$

Система параболична по Петровскому, если у векового $\det|A-\lambda I|=$ корни таковы, что $\operatorname{Re}\lambda_k>0,\ k=1,2$.

В зависимости от их вещественности или комплекснозначности и от их кратности систему можно привести к каноническому виду

$$u_t = E_\lambda \Delta u, \qquad (1)$$

где матрица E_λ принимает одну из следующих форм

$$E_1=\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \bar\lambda\end{bmatrix},\ E_3=\begin{bmatrix} a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix},\ a>0,\ (0<a<b)$$

$\lambda, \bar\lambda$ – комплексно – сопряженные числа.

Задача. В области D разыскивается решение системы (1), удовлетворяющее однородным начальным

$$u(+0,x,y)=0,\ x>0,\ y\in R \qquad (2)$$

и неоднородным граничным

$$B_1u_x+B_2u_y+B_3u=\varphi(x,y),\ t>0,\ y\in R \qquad (3)$$

условиям при $x=0$.

Как предлагаемая методика [1] требует, пусть к вектору – функциям $u(t,x,y)$ и $\varphi(t,y)$ применимы интегральные преобразования Лапласа - $Л_t^+(p)$ и Фурье - $\Phi_y^+(\omega)$.

Чтобы (1) - (3) являлась задачей с касательной производной требуется выполнения следующих соотношений

$$rangB_1 < rang(B_1,B_2) \qquad (4)$$

Здесь присутствуют три типа (5 подтипов) задач. Без ограничения общности распишем соответствующие им граничные равенства [2]:

1-ый – тип - $rangB_1=1,\ rang(B_1,B_2)=2$:

$$\alpha_0u_x+\alpha_1\vartheta_x+\alpha_2u_y+\alpha_3u+\alpha_4\vartheta=\varphi_1,$$
$$\vartheta_y+\beta_0u+\beta_1\vartheta=\varphi_2; \qquad (3.1)$$

2-ой – тип - $B_1\equiv 0,\ rangB_2=2$:

а) когда $rangB_3=2$, имеем

$$u_y+\alpha_0u+\alpha_1\vartheta=\varphi_1,\ \ \vartheta_y+\beta_0u+\beta_1\vartheta=\varphi_2; \qquad (3.2.а)$$

б) когда $rangB_3<2$, имеем

$$\alpha_0u_y+\alpha_1\vartheta_y=\varphi_1,\ \ \vartheta_y+\beta_0u+\beta_1\vartheta=\varphi_2; \qquad (3.2.б)$$

3-ий – тип - $B_1\equiv 0,\ rangB_2=1$ условие приведем к виду

$$\alpha_0u_y+\alpha_1\vartheta_y+\alpha_2\vartheta=\varphi_1,\ \ \beta_0u+\beta_1\vartheta=\varphi_2; \qquad (3.3.а)$$

когда $rangB_3=2$ к виду когда $rangB_3=1$

$$\alpha_0u_y+\alpha_1\vartheta_y=\varphi_1,\ \ \beta_0u+\beta_1\vartheta=\varphi_2; \qquad (3.3.б)$$

2°. Анализ граничных условий (прямой ход)

Подробно изучаем систему (1), у которой $E_\lambda=E_1=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix},\ 0<a<b$.

Применив интегральные преобразования к системе (1) с учетом однородных начальных данных (2), придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно образа решения $(\tilde u,\ \tilde\vartheta)$

$$\tilde{u}'' = (\frac{p}{a} + \omega^2)\tilde{u},\ \ \tilde{\vartheta}'' = (\frac{p}{b} + \omega^2)\tilde{\vartheta},\ x > 0\ \ (0 < a < b)(5)$$

Теперь приступаем к изучению граничных условий, постепенно переходя от одного типа к другому. Везде «главную часть задачи» составим по правилу Эйдельмана, т.е. из каждого равенства выделим члены со старшими производными.

Итак, из граничных равенств после применения Лаплас – Фурье преобразования соответственно, имеем

$$-\alpha_0\lambda_a\tilde{u} - \alpha_1\lambda_b\tilde{\vartheta} + i\omega\alpha_2\tilde{u} = \tilde{\varphi}_1,\ \ i\omega\tilde{\vartheta} = \tilde{\varphi}_2\ \ (3.\ 1')$$

$$\begin{cases} i\omega\tilde{u} = \varphi_1, i\omega\tilde{\vartheta} = \tilde{\varphi}_2 & (3.2.\ a') \\ i\omega(\alpha_0\tilde{u} + \alpha_1\tilde{\vartheta}) = \tilde{\varphi}_1, & (3.2.\ б') \end{cases}$$

$$i\omega(\alpha_0\tilde{u} + \alpha_1\tilde{\vartheta}) = \tilde{\varphi}_1,\ \beta_0\tilde{u} + \beta_1\tilde{\vartheta} = \tilde{\varphi}_2\ \ (3.3')$$

Подставив в полученные соотношения общее решение ОДУ

$$\tilde{u} = C_1 e^{-\lambda_a x},\ \tilde{\vartheta} = C_2 e^{-\lambda_b x},\ \lambda a = \sqrt{\frac{p}{a} + \omega^2}\qquad (6)$$

для определения неизвестных C_1 и C_2, получим систему линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у).

Приравнивая их определители к нулю (необходимое условие некорректности), получаем

$$\Delta_1 = -\omega^2\alpha_2 - i\omega\alpha_0\lambda_a = 0,\ \Delta_2 = -\omega^2 = 0,$$
$$\Delta_3 = -i\omega\sigma = 0,\ \delta = \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1.$$

Откуда следуют утверждения:

1) множество нулей этих определителей совпадают между собой, его напишем в виде $P_0 = (p - любое,\ \omega = 0)$, кроме того, для третьего определителя, вдобавок, имеет место множество $p_0' = [\delta = 0, (p, \omega) - любое]$.

2) на всей плоскости коэффициентов $(\frac{\alpha_0}{\beta_0}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}) \equiv (x_0, x_1)$ задачи поставлены некорректно (нарушается однозначная разрешимость).

3) условия некорректности H, такие

α) «коэффициентное» $\delta = 0$, а параметры $(p,\ \omega)$ - любые;

β) «корневое» – p – любое и $\omega = 0$.

Замечание. Результаты анализа для других канонических форм E_2 и E_3 такие же.

Об обозначениях P_0 и H см[1]

3°. Решение некорректных задач (обратный ход)

В дальнейшем достаточно изучить задачу с граничным условием (3.3.б). Рассмотрим по отдельности каждый из вариантов.

3.α) Решаем с.л.а.у., отвечающей данному условию

$$\Im C = \varphi:\ \ i\omega\alpha_0 C_1 + i\omega\alpha_2 C_2 = \tilde{\varphi}_1,\ \ \beta_0 C_1 + \beta_1 C_2 = \tilde{\varphi}_2\ (3')$$

на прямой (на биссектрисе)

$$(\frac{\alpha_0}{\beta_0}) = (\frac{\alpha_1}{\beta_1})\ \ (\delta = 0).$$

При условии разрешимости

$$\tilde{\varphi}_1(p,\omega) = \frac{\alpha_0}{\beta_0} i\omega\tilde{\varphi}_2(\rho,\omega)\qquad (7.\alpha)$$

нормальным решением будет [3]

$$C_H = (\beta_0, \beta_1)\frac{\tilde{\varphi}_2(p,\omega)}{\beta^2},\ \ \beta^2 = \beta_0^2 + \beta_1^2.\ \ (8.\alpha)$$

Решение задачи (5), (3.3′) для ОДУ определим по формуле (6) с коэффициентами (8.α)

$$\tilde{u}_H = \frac{\beta_0 e^{-x\lambda_a}\varphi_2}{\beta^2},\ \ \tilde{\vartheta}_H = \frac{\beta_1 e^{-x\lambda_b}\varphi_2}{\beta^2}\qquad (6.\alpha)$$

Получено нормальное решение задачи, удовлетворяющее системе (5), причем граничные данные имеют место на указанной прямой при наличии условия разрешимости (7.α).

Из (7.α) находим

$$\varphi_1(t,y) = \frac{\alpha_0}{\beta_0}\partial_y\varphi_2(t,y).\qquad (7'.\alpha)$$

Далее

$$\tilde{\varphi}_2(p,\omega)e^{-x\lambda_a} \Rightarrow \frac{x}{4a\pi}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\int_R \varphi_2(\tau,z)e^{-\frac{x^2+(y-z)^2}{4a(t-\tau)}}dz =$$

$$= -2a\partial_x\int_0^t\int_R \varphi_2(\tau,z)E_a(t-\delta, x, y-z)d\tau dz \equiv p_a(t,x,y),$$

где $E_a(t,x,y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}}}{4a\pi t}$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности $u_t = a^2(u_{tt} + u_{yy})$.

Значит

$$u_H = \frac{\beta_0}{\beta^2}P_a(t,x,y),\ \ \ \vartheta_H = \frac{\beta_1}{\beta^2}P_b(t,x,y)\,(6'.\alpha)$$

Очевидно, в полученном решении (6′.α) достаточно проверить только граничные равенства

(3.3′), для этого требуется найти значения P_a и $\partial_y \rho_a$ на границе $x = 0$:

$$\partial_y p_a = 2a\partial_x \int_0^t d\tau \int_R \varphi_2(\tau, z)\partial_z E_a(t-\tau, x, y-z)dz =$$

$$= -2a\partial_x \int_0^t \int_R \partial_z \varphi_2(\tau, z) E_a(t-\tau, x, y-z)dz.$$

После двойной подстановки

$$z - y = 2\xi\sqrt{a(t-\tau)} \text{ и } x = 2\eta\sqrt{a(t-\tau)}$$

имеем

$$P_a(t,x,y) = \frac{2x}{\pi}\int_R e^{-\xi^2}d\xi \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} \varphi_2\left(t - \frac{x^2}{4a\eta^2}, y + \frac{x\xi}{\eta}\right)e^{-\eta^2}d\eta.$$

Следовательно, получим

$$p_a(t,0,y) = \varphi_2(t,y) \text{ и } \partial_y p_a(t,0,y) = \partial_y \varphi_2'(t,y).$$

Вернемся к граничным условиям

$$\alpha_0 \partial_y u_H + \alpha_1 \partial_y \vartheta_H = \frac{\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1}{\beta^2}\partial_y \varphi_2 =$$

$$= \left(\frac{\beta_0^2}{\beta^2} + \frac{\alpha_1\beta_0\beta_1}{\alpha_0\beta^2}\right|_{\alpha_1\beta_0=\alpha_0} \varphi_1 = \varphi_1(t,y),$$

$$\beta_0 u_H + \beta_1 \vartheta_H = P_a(t,0,y) = \varphi_2(t,y).$$

Теорема 1. Функции $(6'.\alpha)$ - суть классическое решение рассмотренной задачи на множестве краевых частей, удовлетворяющих условию $(7'.\alpha)$.

3.β) Теперь решаем задачу, когда справедливо «корневое» условие некорректности β) ($\omega = 0$, p – любое).

1) В данным случае с.л.а.у. (3′) принимает вид

$$\tilde{\varphi}_1(p,0) = 0,\ \beta_0 C_1 + \beta_1 C_2 = \tilde{\varphi}_2(p,0).$$

Отсюда, имеем

$$C_H = \frac{(\beta_0, \beta_1)\tilde{\varphi}_2(p,0)}{\beta^2} \text{ с условием } \tilde{\varphi}_1(p,0) = 0 \quad (8.\beta)$$

Значит

$$\tilde{u}_H = \frac{\beta_0}{\beta^2}e^{-x\lambda_a}\tilde{\varphi}_2(p,0),\quad \tilde{\vartheta}_H = \frac{\beta_1}{\beta^2}e^{-x\lambda_b}\tilde{\varphi}_2(p,0) \quad (6.\beta)$$

Итак, получено нормальное решение задачи (5), (3.3′) на всей плоскости (x_0, x_1) с разрезом ($x_0 = x_1$) при условии разрешимости

$$\tilde{\varphi}_1(p,0) = 0. \quad (7.\beta)$$

2) согласно методике [1] сперва применим обратное преобразование Лапласа – $Л_p^-(t)$, поскольку его параметр p – свободен, а затем используем нестандартный путь вычисления Фурье преобразования

$$\tilde{\varphi}_1(p,0) \overset{Л_p^-(t)}{\Rightarrow} \overline{\varphi}_1(t,0) \underset{\Phi_y^+}{\overset{\Delta}{=}} \int_R \varphi_1(t,y)e^{i\omega y}\Big|_{\omega=0} =$$

$$= \int_R \varphi_1(t,y)dy = \varphi_1^0(t).$$

$$\tilde{\varphi}_2(p,0)e^{-x\lambda_a} \Rightarrow -2a\partial_x \int_0^t \varphi_2^0(\tau)E_a(t-\tau,x)d\tau \equiv p_a^0(t,x,y).$$

Далее, находим оригиналы:
Условие разрешимости

$$\int_R \varphi_1(t,y)dy = 0; \quad (8'.\beta)$$

Решение исходной задачи

$$u_H = \frac{\beta_0}{\beta^2}p_a^0(t,x,y),\quad \vartheta_H = \frac{\beta_1}{\beta^2}p_b^0(t,x,y); \quad (6'.\beta)$$

Производную

$$\partial_y p_a^0 = \frac{x}{4a\pi}\int_0^t \frac{\varphi_2^0(\tau)d\tau}{(t-\tau)}\cdot e^{-\frac{x^2+(y-z)^2}{4a(t-\tau)}}\Bigg|_{z=\pm\infty} = 0;$$

Значения граничных равенств

$$\alpha_0 u_{Hy} + \alpha_1 \vartheta_{Hy} = 0,\ \beta_0 u_H + \beta_1 \vartheta_H$$

$$= \varphi_2^0(t) = \left(\int_R \varphi_2(t,y)dy\right) \quad (3.3.\beta)$$

Теорема 2. Функции $(6'.\beta)$ будут нормальным решением задачи на всей плоскости с разрезом на множестве функции

$$\varphi_1(t,y) = 0,\ \int_R \varphi_2(t,y)dy \neq 0 \quad (7'.\beta)$$

3) **Псевдорешение.** По определению [3] решаем вариационную задачу

$$\|\Im C - \varphi\|^2 \Rightarrow \min_{C_j},$$

исходя из с.л.а.у. (3′).

Необходимое условие приводит к одному уравнению

$$\beta_0 C_1 + \beta_1 C_2 = \tilde{\varphi}_2.$$

Следовательно, нормальное псевдорешение C_n совпадает с нормальным решением C_H (8.β), но без дополнительного условия разрешимости.

Теорема 3. Хотя псевдорешения с.л.а.у. и краевой задачи для ОДУ удается определить без условий разрешимости, все же функции $(6'.\beta)$ будут «решением» (исходной) задачи для системы (1) с условием $(7'.\beta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темирболат С.Е.* «Конструирование и решение некорректных краевых задач» - Алматы, Қазақ университеті, 2003, 130с.

2. *Базарбаева С.Е.* О разрешимости смешанных задач для системы дифференциальных уравнений тепло – и массообмена // Дисс. канд. физ.-мат. наук – Алма - Ата, 1982, 144 с.

3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* «Методы решения некорректных задач» М.: Наука, 1986, 288с.

Резюме

Жұмыста авторлардың бірімен әзірленген параболалық теңдеулер жүйесіне қойылған екі өлшемді қисынды емес есептердің бір класы зерттеледі. Нәтижесінде ондай есептердің шартты шешімінің барлығы көрсетілген.

Summary

In paper one class of ill-posed two-dimensional problems for system of the parabolic equations by a technique developed by one of authors is studied. Are as a result proved conditionally one-valued solvability of such problems.

УДК 517.925

КазНУ им. аль-Фараби,
Алматы

Поступила 16.09.09 г.