УДК 532.685

Е.А.АУЖАНИ, Н.К.ШАЖДЕКЕЕВА

О ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УСЛОВИЙ НА КОНТУРАХ ОБЛАСТЕЙ ПИТАНИЯ И РАЗГРУЗКИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Исследована задача о восстановлении контура питания и разгрузки эффективных пластов и идентификации фильтрационных пластов. Рассматриваемые математические модели необходимы только для газоносных пластов. Следуя принятой схеме, приведены алгоритмы решения прямых и обратных задач, а также проведены численные эксперименты с помощью реальных данных конкретного месторождения.

Распределение давлений (напоров) по площади такой водонапорной системы целиком определяется фильтрационными параметрами коллекторов, тектоническим строением водоносного бассейна и наличием нефтяных и газовых месторождений.

Алгоритмы решения обратных задач базируются на алгоритмах решения прямых краевых задач. Поэтому в работе рассматриваются постановки и алгоритмы решения как прямых, так и обратных задач теории фильтрации.

1. Постановка задачи. Пусть: G - произвольная область R^n с границей Γ и Γ_i: точнее: Γ_0 – есть непрерывно дифференцируемое многообразие размерности (n-1), G находится по одну сторону от Γ_i, i=0,1.

Пусть A^i - эллиптический дифференциальный оператор в G второго порядка:

$$AU = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) \qquad (1)$$

где $a_{ij} \in C^3(G)$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)T_iT_j \geq \alpha_1(T_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + T_n^2), \quad \alpha_1 > 0 \qquad (2)$$

Предположим, что граница $\Gamma_0 = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$. Пусть функция U «А-гармонична» в G, т.е. является решением уравнения AU =0.

Фильтрация воды в неоднородном по коллекторским свойствам водоносном пласте с выделенной газовой (нефтяной) залежью описывается следующим образом дифференциальным уравнением эллиптического типа относительно приведенного давления P^* [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,y)h(x,y)\frac{\partial P^*}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k(x,y)h(x,y)\frac{\partial P^*}{\partial y}\right] = 0 \qquad (3)$$

Для решения интересующей нас прямой задачи интегрирование уравнения (3) осуществляется при следующих краевых условиях [3]:

$$\frac{\partial P^*}{\partial n} = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_1, \Gamma_2; \qquad (4)$$

$$P^* = P_n^* = const, \ (x,y) \in \Gamma_3; \quad P^* = P_p^* = const, \ (x,y) \in \Gamma_4; \qquad (5)$$

Итак, для естественного фильтрационного потока в водоносном пласте с выделенной газовой (нефтяной) залежью справедлива прямая краевая задача (3)-(5) где $P^* = P \pm \rho_B g l$; P – давление в точке с координатами x и y; ρ_B - плотность воды; g – ускорение свободного падения; l – расстояние по вертикали от данной точки с координатами x и y до плоскости приведения; n – внешняя по отношению к G нормаль; k – коэффициент проницаемости пласта; h – толщина пласта; Γ_1 - граница газовой (нефтяной) залежи; Γ_2 - непроницаемые границы водоносного пласта; Γ_3 – контур области питания; Γ_4 – контур области разгрузки.

Уравнение (3) описывает процесс стационарной фильтрации. Граничное условие (4) учитывает непроницаемость внешних границ пласта и газовой, нефтяной залежи (непроницаемость для потока воды до начала ее разработки). Условие (5) характеризует значения приведенных давлений на контурах областей питания и разгрузки [4].

Для решения прямой краевой задачи (3)–(5) необходимо задать также зависимости k (x,y) и h (x,y).

Для единственности решения задачи об определении параметра проводимости b (x,y) = k (x,y)*h (x,y) вдоль некоторой линии тока необходимо, чтобы в одной из точек этой линии было известно значение параметров b. Поэтому до ре-

шения рассматриваемой нами задачи необходимо по результатам исследования пьезометрических скважин или с помощью эмпирических формул, либо по выражениям, получаемым после обработки результатов экспериментальных исследований керной определить параметр b, задать приближенно построенную карту значений проводимости пласта.

В результате решения прямой краевой задачи (3) – (5), при заданном распределении фильтрационного параметра b, можно установить распределение приведенного давления P по всей площади водоносного пласта.

В данной работе исследуются два подхода к постановке обратных задач по восстановлению условий на контурах областей питания и разгрузки и идентификации фильтрационных параметров водонапорного бассейна. Такие задачи являются некорректными. Для их решения строятся итерационные алгоритмы.

Если значения приведенных давлений: P_n^* и P_p^* являются искомыми, то они могут быть найдены в результате постановки и решения обратной задачи. Для этого вводим в рассмотрение функционал невязок (сумма средних квадратических отклонений расчетных $P_{рас}^*$ и фактических $P_ф^*$ приведенных пластовых давлений):

$$J = J(P_n^*, P_p^*) = \sum_{i=1}^{N} \left[P_{рас_{ii}}^* - P_{Ф_{ii}}^* \right]^2 \qquad (6)$$

$P_{рас_i}^*$ - расчетные давления в i – й точке (скважине), получаемые в результате решения прямой краевой задачи (3) – (5), описывающей фильтрацию в пласте; $P_{ф_i}^*$ - реальные (фактические) значения давлении в i-й точке (скважине); N – число точек (скважин) – источников информации о значениях пластовых давлений в соответствующих точках водоносного бассейна.

Задача восстановления условий на контурах областей питания и разгрузки водонапорного бассейна заключается в следующем: требуется найти $\overset{(s)}{P_n^*}$, $\overset{(s)}{P_p^*}$ такие, что

$$J(\overset{(s)}{P_n^*}, \overset{(s)}{P_p^*}) = \overset{(s)}{J}, \ \overset{(s)}{J} = \inf_{P_n^*, P_p^* \in W} J(P_n^*, P_p^*), \qquad (7)$$

Множество W можно записать достаточно просто, например,

$$W(P_n^*, P_p^*) = \{(x, y) \in G : P*_{n_{\min}} < < P_n^* < P_{n_{\max}}^*, P_{p_{\min}}^* < P_p^* < P_{p_{\max}}^* \}.$$

Если же искомыми являются приведенные давления P_n^*, P_p^* и фильтрационные параметры b, то они могут быть найдены в результате решения обратной задачи, где показателем качества идентификации расчетной модели пласта служит функционал невязок вида:

$$J = J(P_n^*, P_p^*, b)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[P_{рас_{ii}}^* - P_{Ф_{ii}}^* \right]^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i \left[b_{рас_{ii}} - b_{ф_i} \right]^2 \qquad (8)$$

где w_i - весовая функция (множитель): $b_{ф_i}$ - фактические значения фильтрационного параметра в i-й точке (скважине); $b_{рас_i}$ - расчетные значения фильтрационного параметра в i-й точке (скважине).

Решением обратной задачи будем считать такие функции $\overset{(s)}{P_n^*}$, $\overset{(s)}{P_p^*}$ и $\overset{(s)}{b}$, что

$$J(\overset{(s)}{P_n^*}, \overset{(s)}{P_p^*}, \overset{(s)}{b}) = \inf_{\substack{b \in B \\ P_n^*, P_p^* \in W}} J(P_n^*, P_p^*, b) \qquad (9)$$

где множества $B(b_{\min}, b_{\max}) = \{(x, y) \in G : b_{\min} < b < b_{\max}\}$.

Итак, нами рассмотрены две постановки обратной задачи для уточнения условий на контурах областей питания и разгрузки и фильтрационных параметров водоносного пласта. Рассматриваемые обратные задачи будем решать с использованием градиентных процедур.

2. Необходимые условия оптимальности или вывод выражений для функциональных производных. Для минимизации функционалов вида (2) эффективными являются методы, использующие значение градиента функционала, такие как методы скорейшего спуска и сопряженных градиентов, различные квазиньютоновские методы. Специфика каждого из них заключается в построении соответствующего направления поиска на каждой итерации. Так как основой всех перечисленных методов является определение градиента функционала, получим необходимые выражения для grad J.

Пусть $\delta P^*_п$, $\delta P^*_р$, δb – вариации функции $P^*_п$, $P^*_р$, b, а δJ – вариация функционала J.

Определение производных от функционала J ($P^*_п$, $P^*_р$, b) основывается на получении разложения вариации δJ по независимым вариациям $\delta P^*_п$, $\delta P^*_р$, δb. Коэффициентами такого разложения являются искомые производные:

$$\delta J(P^*_п, P^*_р, b) = \frac{\partial J}{\partial P^*_п}\delta P^*_п + \frac{\partial J}{\partial P^*_р}\delta P^*_р + \frac{\partial J}{\partial b}\delta b \qquad (10)$$

Используем следующее свойство дельта-функции Дирака:

$$J = \int_G f(x,y)\delta(x-x_i, y-y_i)dxdy = f(x_i, y_i) \qquad (11)$$

Из (8) с применением (11) получим:

$$J = \int_G \sum_{i=1}^{N}\left[P^*_{рас_i} - P^*_{ф_м}\right]^2 \delta(x-x_i, y-y_i)dG + \int_G \sum_{i=1}^{N} w_i\left[b_{рас_i} - b_{ф_i}\right]^2 \delta(x-x_i, y-y_i)dG \qquad (12)$$

С учетом введенных обозначений (12) будет иметь вид

$$J = \int_G \sum_{i=1}^{N}\left[P^*_{рас_i} - P^*_{ф_м}\right]^2 \delta dG + \int_G \sum_{i=1}^{N} w_i\left[b_{рас_i} - b_{ф_i}\right]^2 \delta dG \qquad (13)$$

Воспользовавшись определениями вариаций, находим [5]

$$\delta J = 2\int_G \sum_{i=1}^{N}\left[P^*_{рас_i} - P^*_{ф_м}\right]^2 \delta\delta P^* dG + 2\int_G \sum_{i=1}^{N} w_i\left[b_{рас_i} - b_{ф_i}\right]^2 \delta\delta b dG \qquad (14)$$

Запишем задачу (3)-(5) относительно вариации δP^*, пренебрегая членами выше первого порядка малости относительно вариации давление δP^*:

$$\mathrm{div}\, b\nabla\delta P^* + \mathrm{div}\,\delta b\nabla P^* = 0 \qquad (15)$$

или $\mathrm{div}\, b\nabla\delta P^* = -\mathrm{div}\,\delta b\nabla P^*$ (16)

$$\frac{\partial(\delta P^*)}{\partial n} = 0, \qquad (x,y)\in \Gamma_1, \Gamma_2; \quad (17)$$

$$\delta P^* = 0, \qquad (x,y)\in \Gamma_3, \Gamma_4; \quad (18)$$

Отметим, что сделанное выше допущение не имеет принципиального характера. Оно может быть достаточно просто учтено. Но это лишь приведет к усложнению уравнений, при этом слабо сказываясь на конечном результате.

По формуле Грина имеем

$$\int_G U\,\mathrm{div}\, b\nabla\delta P^* dG = \oint_\Gamma Ub\nabla\delta P^* dl - \int_G b(\nabla\delta P^*, \nabla U)dG. \qquad (19)$$

Аналогично

$$\int_G \delta P^*\,\mathrm{div}\, b\nabla U dG = \oint_\Gamma \delta P^* b\nabla U dl - \int_G b(\nabla U, \nabla\delta P^*)dG. \qquad (20)$$

Здесь dl – элемент длины вдоль границы Г, замыкающей площадь G: $(\nabla\delta P^*, \nabla U)$ и $(\nabla U, \nabla\delta P^*)$ - скалярные произведения векторов градиентов.

Из (19) вычитаем (20):

$$\int_G (U\,\mathrm{div}\, b\nabla\delta P^* - \delta P^*\,\mathrm{div}\, b\nabla U)dG = \oint_\Gamma Ub\nabla\delta P^* dl - \oint_\Gamma \delta P^* b\nabla U dl. \qquad (21)$$

Далее складываем (14) и (21)

$$\delta J = 2\int_G \sum_{i=1}^{N}\left[P^*_{рас_i} - P^*_{ф_м}\right]^2 \delta\delta P^* dG + 2\int_G \sum_{i=1}^{N} w_i\left[b_{рас_i} - b_{ф_i}\right]^2 \delta\delta b dG + \int_G U\,\mathrm{div}\, b\nabla\delta P^* dG - \int_G \delta P^*\,\mathrm{div}\, b\nabla U dG - \oint_\Gamma Ub\nabla\delta P^* dl + \oint_\Gamma \delta P^* b\nabla U dl. \qquad (22)$$

Или

$$\delta J = \int_G [2\sum_{i=1}^{N}\left[P^*_{рас_i} - P^*_{ф_м}\right]\delta - \mathrm{div}\, b\nabla U]\delta P^* dG + \int_G U\,\mathrm{div}\, b\nabla\delta P^* dG - \oint_\Gamma Ub\nabla\delta P^* dl + \oint_\Gamma \delta P^* b\nabla U dl + 2\int_G \sum_{i=1}^{N} w_i\left[b_{рас_i} - b_{ф_i}\right]^2 \delta\delta b dG \qquad (23)$$

Потребуем, чтобы введенная ранее сопряженная функция U (x,y) удовлетворяла следующей

краевой задаче:

$$\mathrm{div}\, b\nabla U - 2\sum_{i=1}^{N}(P^*_{pac_i} - P^*_{\phi_i})\delta = 0, \qquad (24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_1, \Gamma_2; \qquad (25)$$

$$U = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_3, \Gamma_4; \qquad (26)$$

Здесь U – некоторый фиктивный потенциал поля, вызванного действием системы источников с плотностями, пропорциональными величинам невязки между расчетными и фактическими давлениями в точках расположения скважин.

Предполагая, что U является решением сопряженной краевой задачи (24)-(26), выражение (23) можно записать в виде

$$\delta J = \int_G U \mathrm{div}\, b\nabla \delta P^* dG - \oint_\Gamma U b\nabla \delta P^* dl + \oint_\Gamma \delta P^* b\nabla U dl + 2\int_G \sum_{i=1}^{N} w_i (b_{pac_i} - b_{\phi_i})\delta\delta b dG. \qquad (27)$$

Используя граничные условия для прямой краевой задачи (4)-(5) и сопряженной краевой задачи (25)-(27) из (27), можно прийти к следующему виду для δJ:

$$\delta J = \int_G U \mathrm{div}\, b\nabla \delta P^* dG - \oint_{\Gamma_3} \delta P^*_n b\nabla U dl + \oint_{\Gamma_4} \delta P^*_p b\nabla U dl + 2\int_G \sum_{i=1}^{N} w_i (b_{pac_i} - b_{\phi_i})\delta\delta b dG \qquad (28)$$

Принимая во внимание равенство (16), имеем

$$\int_G U \mathrm{div}\, b\nabla \delta P^* dG = -\int_G U \mathrm{div}\, \delta b\nabla P^* dG. \qquad (29)$$

К правой части (29) применим формулу Грина

$$-\int_G U \mathrm{div}\, \delta b\nabla P^* dG = -\oint_\Gamma U\delta b\nabla P^* dl + \int_G \delta b(\nabla U, \nabla P^*) dG. \qquad (30)$$

Используем граничные условия (4)-(5) и (25)-(26), как нетрудно видеть, интеграл по контуру в правой части равенства (30) равен нулю.

Окончательно, для вариации δJ функционала (28) с учетом (30) получаем следующее выражение:

$$\delta J = \int_G [(\nabla U, \nabla P^*) + 2\sum_{i=1}^{N} w_i (bpac_i - b\phi_i)\delta]\delta b dG + \oint_{\Gamma_3} b\nabla U\delta P^*_n dl + \oint_{\Gamma_4} \delta P^*_p b\nabla U dl. \qquad (31)$$

Из (31) легко получить выражение для функциональных производных J по P^*_n, P^*_p и b в случае однородного и неоднородного по коллекторским свойствам водоносного пласта.

Алгоритм решения данной обратной задачи заключается в следующем [5-6]:

1. С использованием исходных величин фильтрационного параметра, построенного на основе геолого-геофизической информации, решается прямая краевая задача (3)-(5).

2. В результате находятся приведенные давления в разных точках пласта, в том числе в местах расположения эксплуатационных и наблюдательных скважин. Вычисляется невязка расчетных и фактических приведенных давлений по скважинам.

3. Задается элементарное приращение параметра P^*_n и вновь решается прямая краевая задача (3)-(5).

4. Опять вычисляется невязка расчетных и фактических приведенных давлений по скважинам.

5. Определяется grad J для P^*_n по следующей формуле

$$\frac{\partial \overset{(s)}{J}}{\partial P^*_n} = \frac{\overset{(s)}{J}(P^*_n + \Delta P^*_n, P^*_p) - \overset{(s)}{J}(P^*_n, P^*_p)}{\Delta P^*_n},$$

где ΔP^*_n - элементарное приращение P^*_n.

6. Аналогично для P^*_p задается элементарное приращение ΔP^*_p и решается задача (3)-(5).

7. Вычисляется невязка расчетных и фактических приведенных давлений по скважинам.

8. Определяется grad J для P^*_p по формуле

$$\frac{\partial \overset{(s)}{J}}{\partial P^*_p} = \frac{\overset{(s)}{J}(P^*_n, P^*_p + \Delta P^*_p) - \overset{(s)}{J}(P^*_n, P^*_p)}{\Delta P^*_p},$$

где ΔP^*_p – элементарное приращение P^*_p.

9. Применяя соответствующий метод минимизации по найденному gradJ строится соответствующее направление поиска, определяется шаг вдоль этого направления и уточняются приведенные давления на контурах областей питания и разгрузки. На этом заканчивается первая итерация алгоритма решения обратной задачи, при этом запоминается и величина $\overset{(s)}{J}(P_n^*, P_p^*)$.

Алгоритм решения данной обратной задачи заключается в следующем [5].

С использованием исходных величин фильтрационного параметра, построенных на основе геолого-геофизической информации, решается прямая краевая задача (3)-(5). Определяются разницы расчетных и фактических давлений по скважинам. С использованием этих невязок между приведенными давлениями по скважинам решается сопряженная краевая задача (24)-(26). На основе результатов решения прямой краевой задачи (3)-(5) и сопряженной задачи (24)-(26) с применением, например, метода Симпсона определяются значения функциональных производных по P_n^*, P_p^* и b.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азиз А., Саттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. – М.:Недра, 1982. – 407 с.

2. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

3. *Закиров С.Н., Васильев В.И., Гутников А.И.* и др. Прогнозирование и регулирование разработки газовых месторождений. – М.: Недра, 1984, - 295 стр.

4. *Кричлоу Г.Б.* Современная разработка нефтяных месторождений – проблемы моделирования. – М.: Недра, 1979. – 303 с.

5. *Марчук Г.И.* О постановке некоторых обратных задач // Докл. АН СССР. – М.: 1964, т.156, №3 – стр. 503-506.

6. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980 – 534 с.

Резюме

Жұмыста қоректендіру контурын қалпына келтіру, тиімділік қабатты жеңілдету және фильтрлік қабатты идентификациялау мәселелері зерттелген. Қарастырылған математикалық модельдер тек газ қабаттары үшін қолданылады. Тура және кері есептерді шешу алгоритмдері мен бірге нақты жер қойнауынан алынған мәліметтерге сай сандық эксперименттер жүргізілді.

Summary

In this work we investigate the problems of restoration of contours of feeding, unloading effective layers and identification of filter layers. Considered mathematical models are necessary only for a gas layers. Here are given the algorithms of solution of the direct and inverse problems and also conducted numerical experiments for concrete deposit with real data.