УДК 517.5

Ш. А. БАЛГИМБАЕВА, Ж. М. НУРМУХАМЕДОВА

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ИНФОРМАЦИИ О СПЕКТРЕ НА КЛАССАХ ЗИГМУНДА

Получены точные порядковые оценки для погрешности восстановления оператора дифференцирования на классах Зигмунда по информации о спектре (преобразовании Фурье) функции.

Постановка задачи. Задача линейного оптимального восстановления оператора L на множестве M со значениями в линейном нормированном пространстве X по оператору информации I заключается в нахождении (или оценке) величины

$$E(M,L,I,X)=\inf_{Q}\sup_{x\in M}\|L(x)-S(x)\|_X,$$

где нижняя грань берется по всевозможным линейным отображениям $Q: I(M)\to X$. Такие отображения Q будем называть методами восстановления оператора L по информации I.

Отметим, что весьма полный обзор по задаче о приближении (вообще говоря неограниченного) оператора ограниченными линейными операторами на классах функций (задаче С. Б. Стечкина) и родственным экстремальным задачам приведен в [1]. В частности, в этом контексте подробно изучены операторы, инвариантные относительно сдвига в пространствах $L_p(R^n), 1\le p\le\infty$. Важный класс операторов инвариантных относительно сдвига составляют дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

Здесь рассматривается задача оптимального восстановления оператора дифференцирования ∂_x^α на классе Зигмунда $bZ^s(R^n)$ по информации о спектре в равномерной метрике.

Отметим, что задача оптимального восстановления оператора дифференцирования на основе информации о спектре на соболевских классах в одномерном случае рассматривалась впервые в [2].

Введем некоторые обозначения. Пусть N, Z, R – множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно; $N_0=N\cup\{0\}$ – множество всех неотрицательных целых, $n\in N, R^n$ – n-мерное евклидово пространство. Для $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in R^n$, как обычно, $(x,y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i$ – скалярное произведение. Для мультииндекса α через $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$ обозначим его длину. Обозначим $\partial_x^\alpha:=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$.

Пусть $S(R^n), S'(R^n)$ – пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых быстроубывающих комплекснозначных функций и медленно растущих распределений (обобщенных функций) на R^n соответственно.

Преобразование Фурье обобщенной функции $f\in S'(R^n)$ обозначим через $F(f)$. Для $f\in S'(R^n)$ рассмотрим сужение $F(f)$ на $[-\sigma,\sigma]^n$ как сужение обобщенной функции, т.е. как линейный непрерывный функционал над пространством $D((-\sigma,\sigma)^n)$. Обозначим данное сужение через $F|_{[-\sigma,\sigma]^n}$.

Пусть $C(R^n)$ – пространство ограниченных, равномерно непрерывных на R^n функций f с конечной нормой

$$\|f|C(R^n)\|=\sup\{|f(x)|: x\in R^n\}.$$

Модуль гладкости порядка $l\in N$ функции $f\in C(R^n)$ определяется как обычно:

$$\omega_l(f,h):=$$

$$:=\sup_{y\in R^n:|y|\le h}\left\|\sum_{j=0}^l(-1)^{l-j}C_l^j f(\cdot+jy)\middle|C(R^n)\right\|,$$

$$h\ge 0.$$

Для $m \in N$ обозначим через $C^m(R^n)$ множество всех функций $f: R^n \to R$, таких, что $\forall \alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in N_0^n$, $|\alpha| \le m$, производная $\partial^{|\alpha|} f \in C(R^n)$.

Напомним определение функционального пространства Зигмунда $Z^s(R^n)$, $s > 0$. По числу s определим $m(s) \in N_0$ следующим образом: $m(s) = s-1$, если $s \in N$, иначе $m(s)$ – целая часть числа s; т.е. $m(s)$ является наибольшим целым числом, меньшим s.

Определение 1. Пространство $Z^s(R^n)$ состоит из всех функций $f \in C^{m(s)}(R^n)$, для которых конечна величина

$$\left\| f \middle| Z^s(R^n) \right\| := \left\| f \middle| C(R^n) \right\| +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=m(s)} \sup_{h>0} \omega_2(\partial^\alpha f, h) \cdot h^{m(s)-s}. \qquad (1)$$

Пространство $Z^s(R^n)$ является банаховым пространством с нормой (1). Классом Зигмунда $bZ^s(R^n)$ назовем единичный шар пространства $Z^s(R^n)$:

$$bZ^s(R^n) = \left\{ f \in Z^s(R^n) \middle| \left\| f \middle| Z^s(R^n) \right\| \le 1 \right\}.$$

Известно, что

$$Z^s(R^n) = B^s_{\infty,\infty}(R^n),$$

здесь $B^s_{p\theta}(R^n)$ – пространства Никольского–Бесова, определение см. в [3].

Нами рассматривается задача восстановления оператора дифференцирования ∂^α_x на классах $Z^s_{cl}(R^n)$ в равномерной метрике. В качестве информации о функциях $f \in Z^s(R^n)$ используется сужение преобразования Фурье $F(f)\big|_{[-\sigma,\sigma]^n}$. Таким образом, предполагаются известными значения функционала $F(f)$ на любых функциях из $D((-\sigma,\sigma)^n)$.

Тогда задача восстановления состоит в оценке величины

$$E(Z^s, \partial^\alpha_x, F\big|_{[-\sigma,\sigma]^n}, C(R^n)) =$$

$$= \inf_Q \sup_{\|f|Z^s\| \le 1} \left\| \partial^\alpha_x f - \partial^\alpha_x S[F(f)\big|_{[-\sigma,\sigma]^n}] \right\|_\infty, \quad (2)$$

где нижняя грань берется по всевозможным линейным методам $Q: F(Z^s)\big|_{[-\sigma,\sigma]^n} \to C(R^n)$, и указании линейного метода $\widetilde{Q}$ на котором реализуется порядок величины (2).

В качестве (линейного) метода приближенного восстановления оператора ∂^α_x, использующего информацию $F(f)\big|_{[-\sigma,\sigma]^n}$ о функциях $f \in Z^s(R^n)$, будем рассматривать специальную «частную» сумму ее разложения в ряд по всплескам Мейера (определение системы всплесков Мейера см. в след. разделе).

Система всплесков Мейера. Напомним (см. [4]) конструкцию кратной системы всплесков Мейера. Сначала определим (одномерные) масштабирующую функцию φ и всплеск ψ.

Пусть $\theta(\xi)$ – нечетная бесконечно дифференцируемая функция

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \xi > \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{4} & \xi < -\frac{\pi}{3} \end{cases},$$

$\lambda(\xi)$ – четная функция, такая что

$$\lambda(\xi) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \theta(\xi - \pi), & \xi \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \\ \frac{\pi}{4} - \theta(\frac{\xi}{2} - \pi), & \xi \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right] \\ 0, & \xi \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, \infty\right] \end{cases}$$

Масштабирующую функцию Мейера и всплеск φ и ψ определим через их преобразование Фурье:

$$F(\varphi)(\xi) = \begin{cases} \cos(\lambda(\xi)), & |\xi| \le \frac{4\pi}{3} \\ 0, & |\xi| > \frac{4\pi}{3} \end{cases},$$

откуда

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_R \cos(t\xi)\cos(\lambda(\xi))d\xi .$$

и

$$F(\psi)(\xi)=e^{-i\xi/2}\sin(\lambda(\xi))$$

или

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_R \cos((t-\frac{1}{2})\xi)\sin(\lambda(\xi))d\xi .$$

С помощью операций сдвига и растяжения определяем функции φ_k и ψ_{jk}:

$$\varphi_k(t)=\varphi(t-k),$$

$$\psi_{jk}=2^{j/2}\psi(2^j t-k),\quad j,k\in Z .$$

Из определения видно, что

$$\operatorname{supp} F(\psi)(\xi)\subset\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right],$$

поэтому

$$\operatorname{supp} F(\psi_{jk})(\xi)\subset\left[-2^j\frac{4\pi}{3},2^j\frac{4\pi}{3}\right].$$

Ясно также, что всплески Мейера – это целые функции экспоненциального типа, принадлежащие $S(R)$.

Теперь введем n-мерную систему всплесков Мейера $\Psi:=\{\varphi_k,\psi^e_{jk},k\in Z^n,j\in N_0,e\neq\varnothing\}$ следующим образом:

$$\varphi_k(x):=\prod_{\nu=1}^{n}\varphi_{k_\nu}(x_\nu),\ \psi^e_{jk}(x):=$$

$$=\prod_{\nu\in e'}\varphi_{jk_\nu}(x_\nu)\prod_{\nu\in e}\psi_{jk_\nu}(x_\nu),$$

здесь e пробегает все непустые подмножества множества $\{1,2,...,n\}$, $e'=\{1,2,...,n\}\setminus e$.

Известно, что для любой обобщенной функции $f\in S'(R^n)$ ее разложение в ряд Фурье по всплескам Мейера сходится к f в топологии $S'(R^n)$:

$$f(x)=\sum_{k\in Z^n}c_k(f)\varphi_k(x)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in Z^n}\sum_{e\neq\varnothing}c^e_{jk}(f)\psi^e_{jk}(x), \qquad (3)$$

где

$$c_k(f)=(f,\varphi_k),\quad c^e_{j_\sigma}(f)=(f,\psi^e_{jk})$$

– коэффициенты Фурье f по системе Ψ.

Нам понадобится следующая хорошо известная (см. [4 с.179]) характеризация пространства $Z^s(R^n)$.

Теорема А. Пусть $s>0$. Тогда f принадлежит пространству $Z^s(R^n)$ тогда и только тогда, когда конечна величина

$$\left\|f\middle|Z^s(R^n)\right\|^*:= \qquad (4)$$

$$=\sup\left\{|(f,\varphi_k)|,2^{j(s-\frac{n}{2})}\left|(f,\psi^e_{jk})\right|,k\in Z^n,j\in N,e\neq\varnothing\right\}.$$

Определяемая по коэффициентам разложения (3) (распределения) f. При этом функция $\left\|\bullet\middle|Z^s(R^n)\right\|^*$ из (4) определяет на $Z^s(R^n)$ норму, эквивалентную исходной норме (1).

Основной результат. В качестве метода приближенного восстановления оператора ∂^α_x рассмотрим следующий оператор:

$$\partial^\alpha_x S_\sigma[F(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]=$$

$$=\partial^\alpha_x\left(\sum_{k\in Z^n}c_k(f)\varphi_{0k}+\sum_{e\neq\varnothing}\sum_{j\le j_\sigma}\sum_{k\in Z^n}c^e_{jk}(f)\psi^e_{jk}\right),$$

где $j_\sigma=\left[\log_2\frac{3\sigma}{4\pi}\right]$.

Из определения следует, что $\Psi\subset S(R^n)$; ясно также, что

$$\operatorname{supp}\ F(\psi^e_{jk})(\xi)\subset\left[-2^j\frac{4\pi}{3},2^j\frac{4\pi}{3}\right]^n,$$

$$\operatorname{supp}\ F(\varphi_{0k})(\xi)\subset\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]^n.$$

Таким образом, метод $\partial^\alpha_x S_\sigma[F(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]$ использует информацию только о $F(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}$.

Запись $A \cong B$ означает, что существуют константы $C_1, C_2 > 0$: $A \le C_1 B \le C_2 A$.

Основной результат настоящей статьи содержится в следующей теореме.

Теорема. Для метода восстановления $\partial_x^\alpha S_\sigma[F(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]$ справедливо соотношение:

$$E(Z_{cl}^s, \partial_x^\alpha, F|_{[-\sigma,\sigma]^n}, C(R^n)) \cong$$

$$\cong \sup_{f \in Z_{cl}^s} \left\| \partial_x^\alpha f - \partial_x^\alpha S[F(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}] \right| C(R^n) \| \cong 2^{-j_\sigma s}.$$

Отметим, что для получения оценки сверху используется линейность теоремы А .

При получении оценок снизу строятся "плохие" функции из единичного шара пространства $Z^s(R^n)$, на которых реализуется порядок, с применением теоремы представления А.

Замечание. В работе [6] рассматривалась задача восстановления оператора свертки с фиксированной гладкой функцией в пространстве Никольского–Бесова. В [7] изучена задача восстановления эллиптического оператора произвольного порядка с постоянными коэффициентами на анизотропных классах $B_{p,\theta}^s$ при $1<p<\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат.наук. 1996. Т. 51, вып. 6(312). С. 89-124.

2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функциональный анализ и его приложения. 2003. Т. 37, вып. 3. С. 51-64.

3. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1997. 456 с.

4. *Meyer Y.* Wavelets and operators. Cambridge Univ. Press, 1992.

5. *Балгимбаева Ш.А.* Восстановление оператора свертки в пространствах Никольского–Бесова по информации о спектре // Матем. ж. Алматы, 2006. № 4(22). С. 26-31.

6. *Балгимбаева Ш.А.* Восстановление эллиптического оператора с постоянными коэффициентами по информации о спектре в анизотропном пространстве Никольского–Бесова // Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. 2008. №3. С. 26-29.

Резюме

Зигмунд кластырында дифференциалдау операторын спектр туралы ақпар бойынша қалпына келтіру бір әдісінің нақты реттік бағалаулары алынды.

Summary

In this paper exact (in order sense) estimates for error bounds of a recovery method using spectral information for differentiation operator on the Zigmund classes are obtained.

Институт математики;
КазНПУ им. Абая

Поступила 19.09.09г.