ЖОК 521.1

Ф.Д. БАЙДОЛДА

ГРАВИТАЦИЯЛАУШЫ ЖӘНЕ КЕДЕРГІЛІ ОРТАДАҒЫ МАССАСЫ МЕН ӨЛШЕМІ АЙНЫМАЛЫ ЕКІ ДЕНЕНІҢ ШЕКТЕЛГЕН ЕСЕБІНІҢ ҚАТАҢ ДЕРБЕС ШЕШІМДЕРІ

Бұл жұмыста гравитациялаушы және кедергілі ортадағы дененің массасы және өлшемі айнымалы, пішіні тұрақты сфералық емес дененің гравитация өрісіндегі нүктенің қозғалысы қарастырылған. Мәселенің қатаң дербес шешімдері табылған.

Тығыз қос жүйелерде, құраушы масса мен өлшемдерінің өзгеруі және масса тасымалдау мен диссипация процестері қарқынды жүретіндігі белгілі. Бейстационарлы гравитациялаушы денедегі комбинацияланып жинақталған динамикалық эффектілер: масса, өлшем және пішінің айнымалылығы гравитациялаушы жүйенің әртүрлі эволюция жолдарын зерттеуге мүмкіндік береді. Осы құбылыстарды зерттеу планеталық, жұлдыздық, ғаламдық жүйе эволюциясының динамикалық табиғатымен байланысты [1-3]. Бұл жұмыста гравитациялаушы және кедергілі ортадағы массасы мен өлшемі айнымалы екі дененің қозғалысы қарастырылған.

1. Есебтің қойылуы. Гравитациялаушы және кедергілі ортадағы, массасы мен өлшемі айнымалы дененің гравитация өрісіндегі материялдық нүктенің қозғалысын қарастырайық. OXYZ тік бұрышты абсолютты координаталар жүйесінің бас нүктесін дененің барицентіріне орналастырамыз, ал координата осін дене инерциясының бас центрлік остеріне бағыттаймыз.

Сонымен қатар дененің инерция остерінің бағыттары қарастырылған координаталар жүйесінде бойынша бағытталуы өзгермейді - тұрақты деп аламыз.

Сонда нүктенің қозғалыс теңдеуі келесі түрде болады [4]

$$\ddot{x}=\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x}-\varepsilon\alpha\,\dot{x}-\frac{4}{3}\pi\alpha x,\quad \ddot{y}=\frac{\partial\tilde{U}}{\partial y}-\varepsilon\alpha\,\dot{y}-\frac{4}{3}\pi\alpha y,$$

$$\ddot{z}=\frac{\partial\tilde{U}}{\partial z}-\varepsilon\alpha\,\dot{z}-\frac{4}{3}\pi\alpha z, \qquad (1)$$

мұндағы $\tilde{U}$ - дененің потенциалы , оны остік симметриялы деп қабылдаймыз, α -біртекті орта тығыздығы, $\varepsilon = const$ -пропорционалдық коэффициент, $\pi \approx 3.14$. Күш өрісіне жақын жуықтау алу үшін, Лежандр полиномдары арқылы жіктелген $\tilde{U}$ потенциалын сфералы-симметриялы нақты денеден ең негізгі айырмашылығын сипаттайтын бірнеше бастапқы қосындыларын ескеру жеткілікті. Олардың ішінде

$$J_2 = J_2(t)\ ,\quad J_3 = J_3(t) \qquad (2)$$

аса маңызды. Орталық дененің параметрлері уақытқа байланысты өзгереді, бірақта қарастырылған абсолютты координаталар жүйесінде бас инерция осьтері бағыттары тұрақты, олар координата осьтерімен сәйкес келеді және алғашқы ориентациясын өзгертпейді деп қабылдаймыз. Бұл жағдайда

$$J_i \neq const\,. \qquad (3)$$

Орталық дененің массасы изотропты түрде келесі теңдеумен өзгерсін:

$$M = M(t), \qquad (4)$$

мұндағы $M_0 = M(t_0)$-оның бастапқы мәні. Дене өлшемінің сипаты ретінде оның экваторлық орташа радиусын аламыз. Яғни:

$$R = R(t), \qquad (5)$$

мұндағы $R_0 = R(t_0)$ - оның бастапқы мәні.

Қарастырып отырған жуықтаудағы $\tilde{U}$ потенциалы (2)-(5) өрнектерін ескере келе, келесі теңдеумен сипатталады:

$$\tilde{U}=\frac{fM(t)}{r}\left\{1+\frac{J_2(t)}{2}\left(\frac{R(t)}{r}\right)^2\left(1-3\sin^2\delta\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{J_3(t)}{2}\left(\frac{R(t)}{r}\right)^3\sin\delta\left(3-5\sin^2\delta\right)\right\}, \qquad (6)$$

мұндағы f- гравитациялық тұрақты, r, δ және λ материялық нүктенің сфералық координаталары.

Бастапқы (1) теңдеуді (6) потенциалымен келесі түрде жазамыз:

$$\nu\ddot{x}=\nu\frac{\partial W}{\partial x}-\dot{\nu}\dot{x},\ \nu\ddot{y}=\nu\frac{\partial W}{\partial y}-\dot{\nu}\dot{y}\ ,\ \nu\ddot{z}=\nu\frac{\partial W}{\partial z}-\dot{\nu}\dot{z}, \qquad (7)$$

мұндағы W - функциясы келесі түрге жазылады:

$$W = U + V, \tag{8}$$

$$U = \nu\left[\frac{fM}{r} - \frac{4}{3}\pi\alpha\left(\frac{r^2}{2}\right)\right] \tag{9}$$

$$V = \frac{fM(t)\nu(t)R^2(t)}{r^3}\left\{\frac{J_2(t)}{2}\left(1-3\sin^2\delta\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{J_3(t)}{2}\left(\frac{R(t)}{r}\right)\sin\delta\left(3-5\sin^2\delta\right)\right\} \tag{10}$$

$$\nu = \nu(t) = \exp\left[\varepsilon\int_{t_0}^{t}\alpha(t)\,dt\right]. \tag{11}$$

Қарастырылған (7) қозғалыс теңдеуін келесі түрде жазамыз

$$\frac{d}{dt}(\nu\dot{x}) = \frac{\partial W}{\partial x},\quad \frac{d}{dt}(\nu\dot{y}) = \frac{\partial W}{\partial y},\quad \frac{d}{dt}(\nu\dot{z}) = \frac{\partial W}{\partial z}. \tag{12}$$

Жалпы жағдайда бір аудан интегралы белгілі [3]

$$\nu(\dot{y}x - y\dot{x}) = c = const. \tag{13}$$

Төмендегі теңдеулермен өрнектелетін квазисфералық координаталар жүйесіне көшеміз

$$x = \gamma\rho\cos\delta\cos\lambda,\ y = \gamma\rho\cos\delta\sin\lambda,\ z = \gamma\rho\sin\delta, \tag{14}$$

мұндағы $\gamma = \gamma(t)$ - уақыт функциясы, нақты түрін алда анықтаймыз. Нүктенің кинетикалық энергиянын келесі теңдеумен анықтаймыз

$$K = \frac{\nu}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right). \tag{15}$$

Импульсті жалпы ережемен есептейміз

$$P_\rho = \frac{\partial K}{\partial\dot{\rho}} = \nu\gamma^2\dot{\rho} + \nu\gamma\dot{\gamma}\rho,\quad P_\delta = \frac{\partial K}{\partial\dot{\delta}} = \nu\gamma^2\rho^2\dot{\delta},$$

$$P_\lambda = \frac{\partial K}{\partial\dot{\lambda}} = \nu\gamma^2\rho^2\cos^2\delta\dot{\lambda}. \tag{16}$$

Қозғалыс теңдеуін канондық түрде жазайық

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial P_\rho},\qquad \dot{P}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial\rho}, \tag{16}$$

$$\dot{\delta} = \frac{\partial H}{\partial P_\delta},\qquad \dot{P}_\delta = -\frac{\partial H}{\partial\delta}, \tag{17}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial P_\lambda},\qquad \dot{P}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial\lambda}, \tag{18}$$

мұндағы гамильтониан төмендегі өрнекпен анықталынады.

$$H = \frac{1}{2\nu\gamma^2}\left\{\left(P_\rho - \nu\gamma\dot{\gamma}\rho\right)^2 + \frac{P_\delta^2}{\rho^2} + \right.$$

$$\left.+\frac{P_\lambda^2}{\rho^2\cos^2\delta}\right\} - \frac{1}{2}\nu\dot{\gamma}^2\rho^2 - W. \tag{20}$$

Жалпыланған координата λ-циклдік, сондықтан (19) – ші теңдеуінен төмендегі өрнек алынады

$$\dot{\lambda} = \frac{p_\lambda}{\nu\gamma^2\rho^2\cos^2\delta},\qquad P_\lambda = P_{\lambda 0} = c = const \tag{21}$$

(21) теңдеудегі соңғы өрнек (13) интегралына сәйкес келеді.

Соныман мәселе бейавтономдық канондық (17) - (18) теңдеулер жүйесінің шешімін табуға келіп тіреледі. Оларды келесі түрде ашып жазуға болады

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\nu\gamma^2}\left(P_\rho - \nu\gamma\dot{\gamma}\rho\right),\ \dot{P}_\rho = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}P_\rho + \frac{1}{\nu\gamma^2\rho^3}\left(P_\delta^2 + \frac{c^2}{\cos^2\delta}\right) + \frac{\partial W}{\partial\rho}, \tag{22}$$

$$\dot{\delta} = \frac{1}{\nu\gamma^2\rho^2}P_\delta,\ \dot{P}_\delta = -\frac{c^2\sin\delta}{\nu\gamma^2\rho^2\cos^3\delta} + \frac{\partial W}{\partial\rho}, \tag{23}$$

мұндағы

$$W = U(\rho,\gamma,t) + V(\rho,\delta,\gamma,t). \tag{24}$$

Дербес шешім.

Егерде $\rho = \rho_0 = const$ болса , онда мына шарт орындалған кезде

$$\frac{d}{dt}(\nu\gamma\dot{\gamma}\rho_0) = \nu\dot{\gamma}^2\rho_0 + \frac{1}{n\gamma^2\rho_0^3}\left(P_\delta^2 + \frac{c^2}{\cos^2\delta}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0} \tag{25}$$

(22) – ші теңдеулер жүйесі дербес шешімі

$$\rho = \rho_0 = const,\quad P_\rho = \nu\gamma\dot{\gamma}\rho_0 \tag{26}$$

түрінде анықталады.

OZ осін айнала қозғалатын $n(t)$ - орбиталдық қозғалыстың бұрыштық жылдамдығын (25)-шартынан анықтаймыз

$$n^2(t) = \frac{1}{\cos^2\delta}\left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\nu}}{\nu}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{P_\delta^2}{\nu^2\gamma^2\rho_0^4} - \frac{1}{\nu\gamma^2\rho_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0}\right]. \tag{27}$$

Мұнда келесі белгілеу қолданылған

$$\frac{c}{\nu\gamma^2\rho_0^2\cos^2\delta} = \dot{\lambda} = n(t) \tag{28}$$

(23) – ші теңдігінен алатынымыз

$$P_\delta\frac{dP_\delta}{d\delta} = -c^2\frac{\sin\delta}{\cos^3\delta} + \nu\gamma^2\rho_0^2\left(\frac{\partial W}{\partial\delta}\right)_{\rho=\rho_0}. \tag{29}$$

Күштік функцияны

$$V = V(\rho_0,\delta,\gamma,t) \tag{30}$$

таңдалып алынған $\gamma = \gamma(t)$ функциясына сәйкестендіріп нақтылаймыз. Уақытқа байланысты $\gamma(t)$ функциясын (29) – шы теңдеуінің оң жағындағы екінші қосынды уақытқа тәуелсіз болу шартынан табамыз. Онда (29) теңдеуінің шешімі оңай шешіледі. Жалпы жағдайда U және V функциясын мына түрде қабылдауға болады.

$$U = f\frac{Mv}{r} - \frac{4}{3}\pi\varepsilon\alpha v\left(\frac{r^2}{2}\right), \qquad (31)$$

$$V = -\frac{fMv}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\sin\delta). \qquad (32)$$

Біздің жағдайда дене бейстационар, сондықтан (31), (32) – шы теңдеулердегі $M = M(t)$, $J_n = J_n(t)$, $R = R(t)$.

1. Алдымен мына жағдайды қарастырайық

$$V \approx V_2 = -\frac{fMv}{r}J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_2(\sin\delta). \qquad (33)$$

Бұл жағдайда (29) – шы теңдеуі келесі түрге келеді

$$P_\delta\frac{dP_\delta}{d\delta} = -c^2\frac{\sin\delta}{\cos^3\delta} +$$

$$+v\gamma^2\rho_0^2\left[-\frac{fMv}{\dot{\gamma}\rho_0}J_2\left(\frac{R}{\gamma\rho_0}\right)^2\right]\frac{dP_2(\sin\delta)}{d\delta}, \qquad (34)$$

$$\frac{v(t)}{v(t_0)} = v^*(t), \quad \frac{M(t)}{M(t_0)} = M^*(t),$$

$$\frac{J_2(t)}{J_2(t_0)} = J_2^*(t), \quad \frac{R(t)}{R(t_0)} = R^*(t). \qquad (35)$$

Төмендегі шарт орындалса

$$\frac{v^*(t)\,M^*(t)\,J^*(t)\,R^*(t)}{\gamma(t)} = const = 1 \qquad (36)$$

(34) – шы теңдеу автономды болады және ол интегралданады.

$$\frac{1}{2}P_\delta^2 = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{\cos^2\delta} + k_1\sin^2\delta + c_1, \qquad (37)$$

мұндағы c_1 - интегралдық тұрақты,

$$k_1 = -\frac{3}{2}\frac{fv(t_0)M(t_0)J_2(t_0)R^2(t_0)}{\rho_0}$$

(23) – шы теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуі және (37) – шы теңдеуінен табатынымыз

$$\frac{du}{\pm\sqrt{-2k_1u^4 + (2k_1 - 2c_1)u^2 + 2c_1 - c^2}} = \frac{dt}{v\gamma^2\rho_0^2}, \qquad (38)$$

Мұнда келесі белгілеу енгізілген

$$u = \sin\delta = \frac{z}{r}$$

Сонымен (33) – шы жағдайдағы табылған кеңістіктіктегі дербес шешімдер төмендегі теңдеулермен анықталады

$$\begin{aligned} &\rho = \rho_0 = const, && P_\rho = v\gamma\dot{\gamma}\rho_0, \\ &\sin\delta = u, && P_\delta^2 = \frac{2\left(2k_1u^2 + c_1\right)\left(1 - u^2\right) - c^2}{1 - u^2}, \\ &\lambda = \int n(t)\,dt, && P_\lambda = c = const, \end{aligned} \qquad (39)$$

мұндағы $u = u(t)$-(38) – шы теңдеуінен анықталады, ал $n(t)$-(27) – шы қатынастан анықталады ондағы $\gamma = \gamma(t)$-(36) шарты бойынша төмендегі теңдеудеумен өрнектеледі

$$\gamma = v^*(t)M^*(t)J_2^*(t)R^{*2}(t) \qquad (40)$$

2. Енді шартты келесі жағдайда қарастырайық

$$V \approx V_3 = -\frac{fMv}{r}\sum_{n=2}^{3} J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\sin\delta) \qquad (41)$$

Егер $\gamma = \gamma(t)$ төменгі қатынаспен анықталса

$$\frac{J_3^*}{\gamma^2} + \frac{J_2^*}{\gamma} + \frac{c^2\sin\delta_0}{fvM\rho_0\cos^3\delta_0} = 0, \qquad (42)$$

онда (29) – шы теңдеу (немесе (23) жүйе) келесі дербес шешімді береді

$$\delta = \delta_0 = const, \quad P_\delta = 0, \qquad (43)$$

мұндағы

$$J_n^* = J_n\left(\frac{R}{\rho_0}\right)^n \frac{dP_n(\sin\delta_0)}{d\delta_0} = J_n^*(t), \qquad (44)$$

Сонымен (41) – шы жағдайда дербес шешім мына түрде болады.

$$\begin{aligned} &\rho = \rho_0 = const, && P_\rho = v\gamma\dot{\gamma}\rho_0, \\ &\delta = \delta_0 = const, && P_\delta = 0, \\ &\lambda = \int n(t)\,dt, && P_\lambda = c = const, \end{aligned} \qquad (45)$$

мұндағы $n = n(t)$-(27) – шы өрнегінен алынады, ондағы $\gamma = \gamma(t)$ нақты (42) – шы теңдеудің оң түбірі ретінде анықталады.

Табылған (39), (45) шешімдерінің ерекшелігі, (27)-ші теңдеуінің оң жағы оң болу шарты орындалса және (42)-ші теңдеуінің нақты оң түбірінің болу шарты орындалса болғаны. Басқа шамаларды сол шарттарды қанағаттандыратын кез-келген функциялар деп қабылдауға болады.

ӘДЕБИЕТ

1. *Омаров Т.Б.* Динамика гравитирующих систем Метагалактики.//Алма-Ата: Наука.1975. С.144 .

2. *Omarov T.B. (Editor)* Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy.//New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002, 260 p.

3. *Минглибаев М.Дж.* Динамика нестационарных гравитирующих систем.//Алматы: Қазақ университеті, 2009.С.209.

4. *Минглибаев М.Дж, Омарова Г.Т, Байдолда Ф.Д.* Гравитациялаушы және қарсыласатын ортадағы өлшемі айнымалы орталық дененің өрісіндегі нүкте қозғалысы.// Әль-Фараби ат. ҚазҰУ Хабаршысы, Физикалық сериясы №1(23), 2007. Б.19.

Резюме

В работе рассмотрено движение точки в гравитационном поле центрального несферического тела переменной массы, формы и размеров внутри гравитирующейся и сопротивляющейся среды. Найден новый класс строгих, частных решений рассматриваемой задачи.

Summary

In work is considered moving the point in a gravitational field central not spherical body, variable mass, the forms and the sizes, inwardly gravitational and resisting environment. The new class of strict, private decisions of a considered problem is found.

Департамент
«В.Г. Фесенков ат. Астрофизикалық институты» Алматы қ.

20.06.2009 ж.