А.Т. БАЙМАНКУЛОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ПОЧВЕННОЙ ВОДЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

1. Постановка задачи.

Верхний слой земли от поверхности до уровня грунтовых вод представляет собой пористое тело, между твердыми частицами которого находятся воздух и вода в жидком или парообразном состоянии. Он называется насыщенной зоной и состоит из трех фаз: твердой, жидкой и газообразной. Как установлено, наибольшим изменениям подвергаются жидкая и газообразная фазы. Жидкая фаза – самая динамическая часть ненасыщенной зоны. Изучению свойств ее посвящается эта работа. Мы рассматриваем систему атмосфера- ненасыщенная зона- грунтовая вода. Движение воды в системе имеет непрерывный характер. Условия на границе подсистемы атмосфера и ненасыщенная зона, т.е. поверхность почвы, описывает движения воды в ненасыщенной зоне почвенного профиля. Эти краевые условия действуют на верхней границе ненасыщенной зоны, поэтому будем их называть верхними краевыми условиями для движения воды в ненасыщенной зоне.

Уровень грунтовых вод играет роль границы подсистемы ненасыщенная вода и грунтовые воды. Условия движения воды на границе насыщенной зоны и грунтовых вод называются ее нижними краевыми условиями.

Теория движения воды в почве при изотермических условиях для ненабухающих и недеформирующихся грунтов основано на соотношении, которое выражает связь между потоком и градиентом потенциала переноса для одномерного случая следующим образом

$$q = -K\frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad (1)$$

Где q - удельный поток воды, K- коэффициент гидравлической проводимости почвы, Φ - потенциал переноса. Соотношение (1) было предложено на эмпирической основе Букигемом /1/. Аналитическая запис соотношения (1) была сформулировано Ричардсоном /2/ и Чайлосом /3/ в виде

$$q = -D\frac{\partial \omega}{\partial z} - K.$$

Здесь $D = K\dfrac{\partial \Psi}{\partial \omega}$ - коэффициент диффузии влаги.

Уравнение неразрывности для ненасыщенного потока можно представит в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial \omega}{\partial z}\right) \qquad (2)$$

В начальный момент распределение влаги задается. То есть

$$\omega(z,0) = \omega_0(z) \qquad (3)$$

На границе поверхности почвы и атмосферы задается граничное условие второго рода

$$\frac{\partial \omega(H,t)}{\partial z} = A(t) \qquad (4)$$

На границе грунтовых вод с почвой задается первая граничная условие

$$\omega(0,t) = \omega_2 = const \qquad (5)$$

Задача (2)-(5) в области $Q = (0,H)\times(0,T)$ при заданном $D(z)$ имеет единственное устойчивое решение /4/.

Чтобы решить обратную задачу, т.е. найти например $D(z)$ мы должны ставить дополнительное условие. В нашем случае это влага на поверхности почвы

$$\omega(H,t) = \omega_1(t),\ t \in [0,T]. \qquad (6)$$

В итоге мы получаем задачу (2)-(6).

2. Сопряженная задача.

Введем функцию $W(z,t) = \omega(z,t) - \omega_2 - zA(t)$.

Легко проверить, что $\left.\dfrac{\partial W}{\partial z}\right|_{z=H} = 0$

Тогда

$\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{\partial W}{\partial t} + zA'(t)$, $\dfrac{\partial \omega}{\partial z} = \dfrac{\partial W}{\partial z} + A(t)$. Найденные значения $\dfrac{\partial \omega}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial \omega}{\partial z}$ подставляем в (2). Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right)+A(t)\frac{\partial D(z)}{\partial z}+f(z,t) \qquad (7)$$

где $f(z,t)=-zA'(t)$.

Кроме этого имеют место равенства:

$$W(0,t)=0,\quad \left.\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{z=H}=0,$$

$$W(z,0)=\omega(z,0)-\omega_2-zA(0)=W_0(z) \qquad (8)$$

$$W(H,t)=\omega(H,t)-\omega_2-zA(t)=W_1(t) \qquad (9)$$

Для двух последовательных значении $D_n(z)$ и $D_{n+1}(z)$ уравнение (7) записывается в виде

$$\frac{\partial W^n}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D_n\frac{\partial W^n}{\partial z}\right)+A(t)\frac{\partial D_n(z)}{\partial z}+f(z,t)$$

Тогда для функций $\delta W=W^{n+1}-W^n$ выводится уравнение

$$\frac{\partial \delta W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\delta D\frac{\partial W^{n+1}}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z)\frac{\partial \delta W}{\partial z}\right)+A(t)\frac{\partial \delta D}{\partial z} \qquad (10)$$

$$\delta W(0,t)=0,\quad \left.\frac{\partial \delta W}{\partial z}\right|_{z=H}=0,\quad \delta W(z,0)=0 \qquad (11)$$

Из системы (10)-(11) рассуждая так же как в работе /5/, получим сопряженную задачу в виде

$$\psi(z,T)=0,\quad \psi(0,t)=0, \qquad (12)$$

$$D_n(H)\frac{\partial\psi(H,t)}{\partial z}=-2\left(W^{n+1}(H,t)-W_1(t)\right)$$

Кроме этого справедливо равенство

$$2\int_0^T\left(W^{n+1}(H,t)-W_1(t)\right)\delta W dt=$$

$$=\int_0^H\delta D(z)dz\int_0^T\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}+A(t)\right)dt \qquad (13)$$

Коэффициент капиллярной диффузии определяется из минимума функционала

$$J(D)=\int_0^T\left(W^{n+1}(H,t)-W_1(t)\right)^2dt$$

Поэтому

$$J(D_{n+1})-J(D_n)=2\int_0^T\left(W^{n+1}(H,t)-\right.$$

$$\left.-W_1(t)\right)\delta W dt-\int_0^T(\delta W)^2dt$$

Учитывая (13) перепишем его в виде

$$J(D_{n+1})-J(D_n)=$$

$$=\int_0^H\delta D(z)dz\int_0^T\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}+A(t)\right)dt-\int_0^T(\delta W)^2dt$$

Положим

$$\delta D(z)=-\beta\int_0^T\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}+A(t)\right)dt \qquad (14)$$

Тогда

$$J(D_{n+1})-J(D_n)=$$

$$=-\int_0^H\beta dz\left(\int_0^T\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}+A(t)\right)dt\right)^2-\int_0^T(\delta W)^2dt$$

3. Результаты.

В работе доказаны следующие теоремы

Теорема 1. Для решение задачи (7)-(9) справедливо оценка

$$\left\|\frac{\partial W^n}{\partial t}\right\|^2+\int_0^T\left\|\sqrt{D_n}\frac{\partial^2W^n}{\partial z\partial t}\right\|^2dt\le C_1\left(1+\int_0^HD(z)dz\right)$$

Теорема 2. Для решение задачи (10)-(11) справедливо оценка

$$\left\|\frac{\partial\psi^n}{\partial t}\right\|^2+\int_0^T\left\|\sqrt{D_n}\frac{\partial^2\psi^n}{\partial z\partial t}\right\|^2dt\le C_2\left(1+\int_0^HD(z)dz\right),$$

Теорема 3. Если имеет место теоремы 1 и теоремы 2 и справедливо формула (14), то имеет место неравенство

$$\int_0^HD(z)dz\le C_3<\infty.$$

Теорема 4. Если имеет место теоремы 1,3 и теоремы 3 то

$$|\nabla J(\mu)|\le C_3.$$

Теорема 5. Последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится к одному пределу и ограничено сверху и снизу положительной константой.

Теорема 6. Последовательность $\{J(\lambda_n)\}$ является монотонно убывающей и ограничено сверху и снизу положительной константой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buckingham E.* Studies on movement of soil moisture. U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington), 1907, Bull. 38.

2. *Richards L.A.* Capillary conduction of liquids through medians. Physics, 1931, vol, 1, p.318-333.

3. *Childs E.D.* The transport of water through heavy clay soils. I, III. j.Ag. Sci., 1936, vol. 26.

4. *Тиханов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1996, 724 с.

5. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Маханбетова Г.И.* Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.

6. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмайлов А.О.* Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний// Вестник НАН РК. 2008. №2. С. 7-9

Резюме

Жұмыста қанықпаған ортамен судың қозғалысы қарастырылады. Ортаның капиллярлық диффузия коэффициентін анықтайтын итерациялық тәсіл ұсынылады. Тура және түйіндес есептердің шешіміне априорлық баға алынады және итерациялық тәсілдің жинақтылығы дәлелденеді.

Summary

This work reduces mathematical isothermal model of movement of water in not sated environment. The iterative method is offered, which helps to define coefficient capillary diffusion of ground. Prior appreciations of the solution direct and connected task are received and the convergence of the iterative method is proved.