А.Т. БАЙМАНКУЛОВ

ОГРАНИЧЕННОСТЬ И СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ПОЧВЕННОЙ ВОДЫ

Изучается движение влаги в ненасыщенной почве. Задается влага почвы на поверхности земли. Выводится итерационная формула, с помощью которой определяется коэффициент диффузии почвенной воды.

1. Постановка задачи.

В работе изучается система атмосфера-ненасыщенная зона- грунтовая вода. Движение воды в системе имеет непрерывный характер. Теория движения воды в почве при изотермических условиях для ненабухающих и недеформирующихся грунтов основана на законе Букингема /1/, который выражает связь между потоком и градиентом потенциала переноса. Аналитическая запись закона Букингема записана в виде $q = -D\frac{\partial W}{\partial z} - K$ Ричардсоном /2/ и Чайлосом /3/. Здесь – коэффициент диффузии влаги, q – удельный поток воды, K – коэффициент гидравлической проводимости почвы, W – влажность грунта. Уравнение неразрывности для ненасыщенного потока можно представит в виде /4/

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right). \qquad (1)$$

В начальный момент распределение влаги задается. То есть

$$W(z,0) = W_0(z).$$

На границе поверхности почвы и атмосферы задается граничное условие второго рода

$$\frac{\partial W(H,t)}{\partial z} = A(t).$$

На границе грунтовых вод с почвой задается первое граничное условие

$$W(0,t) = W_1 = const.$$

Чтобы найти $D(z)$, мы должны ставить дополнительное условие. В нашем случае это влага на поверхности почвы

$$W(H,t) = W_g(t),\ t \in [0,T].$$

Введем новую функцию

$$W(z,t) = \overline{W}(z,t) - W_1 - zA(t). \qquad (2)$$

Легко проверить, что

$$\overline{W}(0,t) = 0 \text{ и } \frac{\partial \overline{W}(H,t)}{\partial z} = 0.$$

Из (2) следуют равенства

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial \overline{W}(z,t)}{\partial t} - zA'(t)$$

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial z} = \frac{\partial \overline{W}(z,t)}{\partial z} - A(t).$$

Найденные производные подставляем в (1). Функцию $\overline{W}(z,t)$ снова обозначим через $W(z,t)$. Тогда получится следующая задача

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right) - A(t)\frac{\partial D(z)}{\partial z} + zA'(t), \qquad (3)$$

$$W(0,t) = 0,\ \frac{\partial W(H,t)}{\partial z} = 0,$$

$$W(z,0) = W_0(z) + W_1 + zA(0). \qquad (4)$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями:

$f(z,t) = zA'(t)$ и величину $W_0(z) + W_1 + zA(0)$ обозначим снова через $W_0(z)$.

Задача (3)-(4) в области $Q = (0,H)\times(0,T)$ при заданном $D(z)$ имеет единственное устойчивое решение /5/. Методика решения обратной задачи кондуктивного распространения температуры разработана в работах /6, 7/, а общая схема определения коэффициента диффузии на дифференциальном уровне изучена в работе /8/. В настоящей работе доказывается монотонность функционала при определении коэффициента диффузии $D(z)$.

2. Разностные задачи.

В дискретной области $Q_N^m = \{z_i = i\cdot\Delta z,\ \mathrm{t_j} = j\cdot\Delta t | N\cdot\Delta z = H;\ \mathrm{m}\cdot\Delta\mathrm{t} = \mathrm{T}\}$ ищется решение задачи

$$Y_{\bar{i}}^{j+1} = \left(D(z_{i-1})Y_{\bar{z}}^{j+1}\right)_z + A^{j+1}D_{i,z} + \varphi_i^{j+1},$$

$$i = 1,2,\ldots,N;\ \mathrm{j} = 0,1,\ldots,\mathrm{m}-1. \qquad (5)$$

$$Y_0^j = 0,\ \mathrm{Y}_{\mathrm{N},\bar{z}}^{\mathrm{j}} = 0,\ \mathrm{Y}_{\mathrm{i}}^0 = W_0(z_i). \qquad (6)$$

В работе /9/ из (6)-(7) получена сопряженная задача

$$U_{\bar{i}}^{j+1} + \left(D_n(z_{i+1})U_{i,z}^j\right)_{\bar{z}} = 0, \qquad (7)$$

$$U_i^m = 0,\quad U_0^j = 0,$$

$$D_n(z_{N-1})U_{N,\bar{z}}^j = 2\left(Y_N^{j+1} - U_g(t_{j=1})\right). \qquad (8)$$

Приближенное значение коэффициента капиллярной диффузии определяется из минимума функционала

$$J(D) = \sum_{j=0}^{m-1}\left(Y_N^{j+1} - W_g(t_{j+1})\right)^2\Delta t.$$

Задается $D_n(z)$, следующее приближение коэффициента капиллярной диффузии определяется по формуле /9/:

$$D_{n+1}(z_i) = D_n(z_i) + \sum_j \beta_n(z_i)\left(Y_{i,\bar{z}}^{j+1}U_{i,\bar{z}}^j + A^{j+1}U_{i,\bar{z}}^j\right)\Delta t;\ \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{N}-1. \qquad (9)$$

$$J(D_{n+1}) - J(D_n) = -\sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_j \beta_n(z_i)\left(Y_{i,\bar{z}}^{j+1}U_{i,\bar{z}}^j + A^{j+1}U_{i,\bar{z}}^j\right)\Delta t\right)^2\Delta z -$$

$$-\sum_j\sum_{i=1}^{N-1}\Delta D(z_i)\cdot\Delta Y_{i,\bar{z}}^{j+1}U_{i,\bar{z}}^j\Delta z\Delta t + \sum_j\left(\Delta Y_N^{j+1}\right)^2\Delta t. \qquad (10)$$

3. Ограниченность $D_{n+1}(z)$.

Суммируем (5) и (7) по i от произвольного i до $N-1$. Тогда

$$\sum_i U_{\bar{i}}\Delta z = -\left(Y_N^{j+1} - W_g^{j+1}\right) - D_n(z_{i-1})U_{\bar{z}}.$$

Из полученных равенств выводим:

$$\sum_j D\left(Y_{\bar{z}}^{j+1}\right)^2\Delta t \le \sum_j \left\|Y_{\bar{i}}\right\|^2\Delta t + C_1,$$

$$\sum_j D\left(U_{\bar{z}}^{j+1}\right)^2\Delta t \le \sum_j \left\|U_{\bar{i}}\right\|^2\Delta t + \left|Y_N^{j+1'}\right| + C_2 \qquad (11)$$

Суммируем (9) по n от нуля до произвольного n. Тогда

$$D_{n+1}(z_i) = D_0(z_i) + \sum_n\sum_j \beta_n(z_i)\left(Y_{i,\bar{z}}^{j+1}U_{i,\bar{z}}^j + A^{j+1}U_{i,\bar{z}}^j\right)\Delta t.$$

Выбираем $\beta_n(z_i) = \dfrac{\sqrt{\beta}}{n^2}D_n(z_{i-1})$. Поэтому

$$\left|D_{n+1}(z_i) - D_0(z_i)\right| \le$$

$$\le \beta\sum_n\frac{1}{n^2}\left[\left(\sum_j D_{i-1}\left(Y_{i,\bar{z}}^{j+1}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_j D_{i-1}\left(U_{i,\bar{z}}^{j+1}\right)^2\right)^{1/2}\right] +$$

$$+\beta\sum_n\frac{1}{n^2}\left[\left(\sum_j D_{i-1}\left(A^{j+1}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_j D_{i-1}\left(U_{i,\bar{z}}^{j+1}\right)^2\right)^{1/2}\right] \qquad (12)$$

В работе /10/ доказано неравенство

$$\max_t\left\|Y_{\bar{i}}^{j+1}\right\| + \max_t\left\|U_{\bar{i}}^{j+1}\right\| + \left|Y_N^{j+1}\right| \le C_3.$$

Поэтому из (12), учитывая (11), выводим, что $\left|D_{n+1}(z_i) - D_0(z_i)\right| \le C_4\beta$.

Это означает, что существует константы C_5 и C_6 такие, что имеют место неравенства

$$0 < C_5 \le D_n(z_i) \le C_6 < \infty.$$

4. Монотонность функционала.

Теорема. Если $B_i = \sum_j \beta_n(z_i)\left(Y_{i,\bar{z}}^{j+1}U_{i,\bar{z}}^j + A^{j+1}U_{i,\bar{z}}^j\right)\Delta t \ne 0;\ \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{N}-1$ то из (10) следует неравенство

$$J(D_{n+1}) - J(D_n) < 0 .$$

Доказательство. Для этого рассматривается задача, полученная в работе /9/

$$\Delta Y_i^{j+1} = \left(\Delta D(z_{i-1}) \cdot \overset{n+1}{Y}_{i,\bar{z}} + D_n(z_{i-1}) \Delta Y_{i,\bar{z}}^{j+1} + A^{j+1} \Delta D_i \right)_z, \quad (13)$$

$$\Delta Y_0^j = 0, \quad \Delta Y_{N,\bar{z}}^j = 0, \quad \Delta Y_i^0 = 0 . \quad (14)$$

Здесь $\Delta Y_i^{j+1} = \overset{n+1}{Y}_i - \overset{n}{Y}_i$; $D_{n+1}(z) - D_n(z) = \Delta D$; $\overset{n+1}{Y}_i$ является решением задачи (5)-(6) при $D = D_{n+1}(z)$.

Умножим (13) на $2\Delta t \Delta z \Delta Y_i^{j+1}$ и суммируем по i от 1 до $N-1$, а по j от 1 до произвольного j. После применения формулы суммирования по частям и учитывая начально-граничные условия (14) получим

$$\Delta \|Y\|_t^2 + 2\sum_j \left\| \sqrt{D_{i-1}} \Delta Y_z \right\|^2 \Delta t \le$$

$$\le -2\sum_{i,j} A(t) \Delta D_i \Delta Y_{i,z} h \Delta t - 2\sum_{i,j} \Delta D_{i-1} Y_{\bar{z}}^{j+1} \Delta Y_{i,\bar{z}}^{j+1} \Delta z \Delta t. \quad (15)$$

Из (9) следует, что имеет место неравенство

$$\|\Delta D\| \le C_7 \beta \text{ и } \max_{i,j} \left| Y_{\bar{z}}^{j+1} \right| \le C_8 .$$

На основе этих оценок из (15) выводится неравенство

$$\Delta \|Y\|_{\bar{t}}^2 + C_5 \sum_j \|\Delta Y_z\|^2 \Delta t \le C_9 \beta^2 . \quad (16)$$

Обращаемся к равенству (10). Используя неравенство Коши, выводим, что

$$J(D_{n+1}) - J(D_n) \le -C_{10} \beta \sum_{i=1}^{N-1} (B_i)^2 \Delta z + C_{11} \beta^2 .$$

Малую величину β выбираем так, чтобы имело место неравенство

$$C_{10} \beta \sum_{i=1}^{N-1} (B_i)^2 \Delta z - C_{11} \beta^2 = \beta \left(C_{10} \sum_{i=1}^{N-1} (B_i)^2 \Delta z - C_{11} \beta \right) < 0.$$

В таком случае имеет место равенство

$$J(D_{n+1}) - J(D_n) < 0$$

То есть функционал убывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buckingham E.* Studies on movement of soil moisture. U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington), 1907, Bull. 38.
2. *Richards L.A.* Capillary conduction of liquids through medians. Physics, 1931, vol, 1, p.318-333.
3. *Childs E.D.* The transport of water through heavy clay soils. I, III. j.Ag. Sci., 1936, vol. 26.
4. *Нерпин С.В., Юзефович Г.И.* О расчете нестационарного движения влаги в почве. // Докл. ВАСХНИЛ, №6, 1966.
5. *Тиханов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1996, 724 с.
6. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Маханбетова Г.И.* Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде. // Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.
7. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмаилов А.О.* Разностный метод определения коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний. // Вестник НАН РК. 2008. №2. С. 7-9.
8. *Байманкулов А.Т.* Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде.// Известия НАН РК, 2008, № 3, с.45-47.
9. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т.* Итерационный метод для определения коэффициента диффузии почвенной воды (в печати).
10. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т.* Устойчивость разностных схем прямой и сопряженной задачи для определения коэффициента диффузии почвенной воды

Резюме

Қанықпаған грунтпен ылғалдың таралуы зерттеледі. Жер бетіндегі ылғал беріледі. Топырақтың ылғалдылық коэффициентін табуға арналған итерациялық формула қорытылып шығарылады.

Summaru

Is studied moisture movement in a no saturated ground. The moisture on an earth surface is set. The iterative formula with the help by which the factor of diffusion of soil water is defined is deduced.

Поступила 5.05.2010 г.