УДК 517.9

Ж. Б. БАЙТУЛЕНОВ

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА

Рассматривается модификация метода фиктивных областей для нелинейной нестационарной модели неоднородной жидкости в приближении Буссинеска в трехмерной ограниченной области. Для сильного решения получена оценка скорости сходимости улучшенного порядка.

В связи с созданием пакетов прикладных программ возросла роль методов, позволяющих автоматизировать процесс решения задач математической физики на ЭВМ. Одним из таких методов является метод фиктивных областей (МФО). Метод фиктивных областей в настоящее время широко используется для численного решения прикладных задач. Достаточно широкий обзор работ, посвященных МФО, представлен в работе [1]. В работе [2, 3] МФО обоснован для моделей неоднородных жидкостей. Исследованный в этих работах вид МФО,можно условно назвать «классическим». Для данных МФО неулучшаемая оценка скорости сходимости в классе L_2 имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$. В данной работе обосновывается модификация МФО для модели Буссинеска с более высоким порядком оценки скорости сходимости. Напомним, что аналогичная модификация МФО впервые была предложена в [4] для задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Итак, рассмотрим модель Буссинеска движения неоднородной жидкости в области $\Omega \subset R^3$ с границей $S \in C^2$:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v} = \nu\Delta\mathrm{v} - \nabla p + q\rho, \tag{1}$$

$$div\,\mathrm{v} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\rho = 0, \tag{3}$$

с начально-краевыми условиями

$$\mathrm{v}\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x),\ \mathrm{v}\big|_S = 0,\ \ t\in[0,T],\ \rho\big|_{t=0} = \rho_0(x). \tag{4}$$

Здесь ν – коэффициент кинетической вязкости, g – ускорение свободного падения, $\mathrm{v}(t,x)$ – вектор скорости жидкости, $\rho(t,x)$, $p(t,x)$ – скалярные функции плотности и давления соответственно.

Задача (1)-(4) достаточно хорошо изучена в работе [5]: доказаны теоремы существования обобщенного, сильного и классического решений. Далее мы рассмотрим модификацию метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам для задачи (1)-(4). Итак, во вспомогательной области $D = \Omega \cup D_1$ с границей S_1: $S_1 \cap S = \emptyset$ рассмотрим начально-краевую задачу с малым параметром:

$$\frac{\partial \mathrm{v}^\varepsilon}{\partial t} + (\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\mathrm{v}^\varepsilon = \nu\Delta\mathrm{v}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon - \frac{\xi(x)\mathrm{v}^\varepsilon}{\varepsilon\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^\beta_{L_2(D_1)}} + q\rho^\varepsilon,$$

$$0<\beta<1 \tag{5}$$

$$div\,\mathrm{v}^\varepsilon = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} + (\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\rho^\varepsilon = 0, \tag{7}$$

$$\mathrm{v}^\varepsilon\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x),\ \mathrm{v}^\varepsilon\big|_{S_1} = 0,$$

$$t\in[0,T],\ \rho^\varepsilon\big|_{t=0} = \rho_0(x), \tag{8}$$

где $\varepsilon > 0$, $\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{в } \Omega \\ 1, & \text{в } D_1 = D\setminus\Omega. \end{cases}$ При случае $\beta = 0$ задача (3)-(4) представляет собой известный «классический» вид МФО, который исследован в работе [6], где для решений получена неулучшаемая оценка:

$$\left\|\mathrm{v}^\varepsilon - \mathrm{v}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|\rho^\varepsilon - \rho\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le$$

$$\le C\sqrt{\varepsilon}. \tag{9}$$

Пространства $\overset{0}{J}(D)$ и $\overset{0}{J^1}(D)$ - замыкание множества бесконечно-дифференцируемых соленоидальных финитных в D вектор-функций в нормах пространств $L_2(D)$ и $W_2^1(D)$ соответственно [5].

Определение. Сильным решением задачи (5)-(8) называются функции $v^\varepsilon, \rho^\varepsilon, p^\varepsilon$: $v^\varepsilon \in$

$$\in L_2\left(0,T;\overset{0}{J^1}(D)\cap W_2^2(D)\right),\quad v^\varepsilon \in L_\infty\left(0,T;\overset{0}{J^1}(D)\right),$$

$$v_t^\varepsilon \in L_2\left(0,T;\overset{0}{J}(D)\right),\qquad \rho^\varepsilon \in L_2\left(0,T;W_2^2(D)\right),$$

$$\rho_t^\varepsilon \in L_2\left(0,T;L_2(D)\right),\qquad \rho^\varepsilon \in L_\infty\left(0,T;L_\infty(D)\right),$$

$p^\varepsilon \in L_2\left(0,T;W_2^1(D)\right)$, *которые квадратично суммируемы вместе с производными, входящими в (5)-(7), а также удовлетворяют почти всюду уравнениям (5)-(7) и начально-краевым условиям (8).*

Теорема. *При* $\varepsilon \to 0$ *сильное решение задачи (5)-(8) сходится к сильному решению задачи (1)-(4) со скоростью:*

$$\left\|v^\varepsilon - v\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|v^\varepsilon - v\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)} +$$

$$+\left\|\rho^\varepsilon - \rho\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \le C\varepsilon^{\frac{3-2\beta}{4-3\beta}}. \qquad (10)$$

Заметим, что, при $\beta \to 1$, степень малого параметра стремится к 1 (сравните с (9)).

Доказательство. Умножим уравнения (1) и (3) скалярно в $L_2(\Omega)$ на пробные функций $\phi \in L_\infty\left(0,T;\overset{0}{J^1}(D)\right), \psi \in L_\infty\left(0,T;W_2^1(D)\right)$ соответственно:

$$(v_t + (v\cdot\nabla)v,\phi)_{L_2(\Omega)} + \nu(v_x\cdot\phi_x)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \nu\int_S \frac{\partial v}{\partial n}\phi dS - \int_S pn\phi dS + (\rho q,\phi)_{L_2(\Omega)},$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (v\cdot\nabla)\rho,\psi\right)_{L_2(\Omega)} = 0,$$

v – продолжим нулем вне Ω. Обозначим $v - v = \omega$, $\rho - \rho^\varepsilon = \pi$. Тогда, полагая $\psi = \pi$, $\phi = \omega$, из последних равенств и (5), (7) для ω, π получим уравнения

$$\left(\frac{\partial\pi}{\partial t},\pi\right)_{L_2(D)} + ((v\cdot\nabla)\pi,\pi)_{L_2(D)} +$$

$$+((\omega\cdot\nabla)\rho^\varepsilon,\pi)_{L_2(D)} = 0, \qquad (11)$$

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t},\omega\right)_{L_2(D)} + ((v\cdot\nabla)\omega,\omega)_{L_2(D)} +$$

$$+((\omega\cdot\nabla)v^\varepsilon,\omega)_{L_2(D)} + \nu\|\omega_x\|_{L_2(D)}^2 + \qquad (12)$$

$$+\int_S\left(pn - \nu\frac{\partial v}{\partial n}\right)\omega dS - (q\pi,\omega)_{L_2(D)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|_{D_1}^{2-\beta} = 0.$$

Далее оценим некоторые слагаемые (11)-(12):

$$((\omega\cdot\nabla)\rho^\varepsilon,\pi)_{L_2(D)} = -((\omega\cdot\nabla)\pi,\pi) + ((\omega\cdot\nabla)\rho,\pi) \le$$

$$\le \delta\|\omega_x\|_{L_2}^2 + C\|\nabla\rho\|_{L_4(D)}^2\|\pi\|_{L_2(D)}^2,$$

$$\left|\int_S\left(pn - \nu\frac{\partial v}{\partial n}\right)\omega dS\right| \le$$

$$\le\left(\|p\|_{L_2(S)} + \nu\left\|\frac{\partial v}{\partial n}\right\|_{L_2(S)}\right)\|\omega\|_{L_2(S)} \le$$

$$\le C\|\nabla\omega\|_{L_2(D_1)}^{1/2}\|\omega\|_{L_2(D_1)}^{1/2} \le \qquad (13)$$

$$\le\left(\|\omega_x\|_{L_2(D_1)}\|\omega\|_{L_2(D_1)}^{(2-\beta)/2}\right)^{1/2}\|\omega\|_{L_2(D_1)}^{\beta/4} \le$$

$$\le C\left(\sqrt{\varepsilon}\|\omega_x\|_{L_2(D)}^2 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|\omega\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta}\right)^{1/2}\|\omega\|_{L_2(D_1)}^{\beta/4} \le$$

$$\le C\left(\|\omega_x\|_{L_2(D)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta}\right)^{1/2}\varepsilon^{1/4}\|\omega\|_{L_2(D_1)}^{\beta/4} \le$$

$$\le \delta_1\left(\|\omega_x\|_{L_2(D)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta}\right) + C_1\varepsilon^{1/2}\|\omega\|_{L_2(D_1)}^{\beta/2},$$

$$\int_D (\omega\cdot\nabla)v^{\varepsilon}\omega dx \le \|\omega\|^2_{L_4(D)}\|\nabla v^{\varepsilon}\|_{L_2(D)} \le$$

$$\le C\|\nabla v^{\varepsilon}\|_{L_2}\left(\|\omega\|^2_{L_2(D)} + \|\omega\|^{1\backslash 2}_{L_2(D)}\|\nabla\omega\|^{3\backslash 2}_{L_2(D)}\right)\le$$

$$\le \delta_2\|\nabla\omega\|^2_{L_2(D)} +$$

$$+ C_2\left(\|\nabla v^{\varepsilon}\|^2_{L_2(D)} + \|\nabla v^{\varepsilon}\|_{L_2(D)}\right)\|\omega\|^2_{L_2(D)},$$

$$(q\pi,\omega)_{L_2(D)} \le |q|\|\pi\|_{L_2(D)}\|\omega\|_{L_2(D)} \le$$

$$\le \delta_3\|\pi\|^2_{L_2(D)} + C_3\|\omega\|^2_{L_2(D)}.$$

Далее подбирая δ_i, $i = 1,2,3$ и сложив (11) и (13) получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\omega\|^2_{L_2(D)} + \|\pi\|^2_{L_2(D)}\right)+$$

$$+ C_4\left(\|\omega_x\|^2_{L_2(D)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{2-\beta}_{L_2(D_1)}\right)\le$$

$$\le A(t)\left(\|\omega\|^2_{L_2(D)} + \|\pi\|^2_{L_2(D)}\right)+$$

$$+ C_1\varepsilon^{1/2}\|\omega\|^{\beta/2}_{L_2(D_1)}, \qquad (14)$$

где $L_1(0,T) \ni A(t)$ - определяется из (13). Оценим далее

$$\varepsilon^{1/2}\|\omega\|^{\beta/2}_{L_2(D_1)} \le \delta\left(\|\omega\|^{\frac{\beta}{2}}_{L_2(D_1)}\right)^{\frac{2(2-\beta)}{\beta}} +$$

$$+ C_\delta\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2(2-\beta)}{4-3\beta}} \le \frac{C_4}{2\varepsilon}\left(\|\omega\|^{2-\beta}_{L_2(D_1)}\right)+$$

$$+ C\varepsilon\cdot\varepsilon^{\frac{2-\beta}{4-3\beta}} = \frac{C_4}{2\varepsilon}\|\omega\|^{2-\beta}_{L_2(D_1)} + C\varepsilon^{\frac{6-4\beta}{4-3\beta}},\ \ 1 > \beta > 0.$$

В итоге из (14) по лемме Гронуолла [5] выводим:

$$\|\pi\|^2_{L_\infty(0,T:L_2(\Omega))} + \|\omega\|^2_{L_\infty(0,T:L_2(\Omega))} +$$

$$+ \|\omega_x\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le C\varepsilon^{\frac{6-4\beta}{4-3\beta}},\ \ 1 > \beta > 0,$$

т.е. получим оценки (10). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вабищевич П.Н.* Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1991. 111 с.

2. *Смагулов Ш.С.* Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнения Навье-Стокса // Изд. ВЦ СО АН СССР. Препринт. Новосибирск, 1979. № 68. С. 68-73.

3. *Жумагулов Б.Т., Куттыкожаева Ш.Н., Крыкпаева А.А.* Метод фиктивных областей для уравнений неоднородной жидкости. Алматы: НИЦ «Ғылым», 2002. 224 с.

4. *Смагулов Ш.С., Сейлханова Р.Б., Куттыкожаева Ш.Н., Есекеева М.* Суперсходимость метода фиктивных областей // Мат-лы междунар. конф. «Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании» (18–20 сентября). Алматы, 2002. № 4(32). С. 135-140.

5. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 318 с.

6. *Куттыкожаева Ш.Н.* Метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса // Вестн. КазГУ. Сер. мат., мех., инф. 1998. № 13. С. 54-59.

Резюме

Шенелген үшөлшемді облыста Буссинеск жуықтауындағы біртексіз сұйықтық стационарлық емес моделі үшін жалған аймақтар әдісінің модификациясы қарастырылған. Күшті шешім үшін жоғары дәрежелі жинақталу жылдамдығы бағасы алынған.

Summary

Modification of a method of fictitious areas is considered for nonlinear non-stationary model of a non-uniform liquid in Bussinesk's approximation in the three-dimensional limited area in this work. The estimation of speed of convergence is received for the strong decision with the improved order.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 29.06.2009г.