Ж. Б. БАЙТУЛЕНОВ

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(Представлена академиком НАН РК Н. К. Блиевым)

Рассматривается модификация метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам для одной нестационарной модели неоднородной сыпучей среды в ограниченной трехмерной области. Получены существования и сходимость хотя бы одного обобщенного и единственного сильного решений. А также выведена оценка скорости сходимости сильного решения лучшего порядка по сравнению с основным видом метода фиктивных областей.

Известно, что метод фиктивных областей (МФО) используется для широкого круга задач математической физики [1]. В данном направлении актуальным является разработка и обоснование модификации МФО, дающий, например, более высокую оценку скорости сходимости решений. В данной работе обосновывается один из таких модификации МФО для нестационарной нелинейной модели несжимаемой неоднородной сыпучей среды с внутренними степенями свободы.

Постановка исходной задачи. Рассмотрим в области $[0,T]\times\Omega$, где $n = 2,3$, $R^n \supset \Omega$ – ограниченная, модель сыпучей среды [2]:

$$\mathrm{v}_t + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v} = \mu\Delta\mathrm{v} - \nabla p + \omega\times\mathrm{v} + f, \quad div\mathrm{v} = 0,$$

$$\omega_t + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\omega + F^2(p)\omega = 0, t\in[0,T], \ x\in\Omega, \qquad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$\mathrm{v}|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x), \quad \mathrm{v}|_S = 0, \ \omega|_{t=0} = \omega_0(x), \qquad (2)$$

где S – граница области Ω; v – вектор скорости; ω – вектор угловой скорости вращения частиц; p – давление; f – плотность внешних сил; $F(p)$ – заданная неотрицательная скалярная функция класса $C^2(0,\infty)$, характеризующая трение между частицами. Она определяется экспериментально и в случае сухого трения имеет вид $F^2(p) = n + kp$, $n = \mathrm{const} > 0$ – постоянная сдвигового сцепления, $k = \mathrm{const} > 0$ – коэффициент трения. Напомним, что в [2] в уравнениях (1) фигурируют параметры $0 < \eta$ – коэффициент Магнуса, m – вектор плотности внешних силовых моментов. Здесь мы для простоты взяли $\eta = 1$, $m = 0$, что существенно не влияет на ход исследований.

Постановка вспомогательной задачи. Для задачи (1)-(2) сформулируем модификацию метода фиктивных областей (МФО) с продолжением по младшим коэффициентам в области $[0,T]\times D$, $D = \Omega\cup D_1$ с границей S_1: $S_1\cap S = \emptyset$

$$\frac{\partial\mathrm{v}^\varepsilon}{\partial t} + (\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\mathrm{v}^\varepsilon =$$

$$= \mu\Delta\mathrm{v}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \omega^\varepsilon\times\mathrm{v}^\varepsilon + \frac{\xi(x)\mathrm{v}^\varepsilon}{\varepsilon\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^\beta_{L_2(D_1)}} + f, \quad (3)$$

$$div\mathrm{v}^\varepsilon = 0, \quad 0<\beta<1, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial t} + (\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\omega^\varepsilon + F^2(p^\varepsilon)\omega^\varepsilon = 0, \qquad (5)$$

$$\mathrm{v}^\varepsilon|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x), \quad \mathrm{v}^\varepsilon|_{S_1} = 0, \ \omega^\varepsilon|_{t=0} = \omega_0(x),$$

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ в } \Omega \\ 1, \text{ в } D_1 = D\setminus\Omega. \end{cases} \qquad (6)$$

где функции f, $\mathrm{v}_0(x)$, $\omega_0(x)$ продолжены нулем вне Ω.

Напомним, что данный вид модификации МФО впервые было предложен в [3] для линейной стационарной модели Стокса. При $\beta = 0$ задача (3)-(6) представляет собой «классический» вид МФО, который изучен в [4]. При $\beta \geq 1$ решение задачи может и не существовать[3]. Используемые в дальнейшем обозначения и пространства, а также неравенства теорем вложения взяты из [2], напр.: $V(D)$ – замыкание множества финитных соленоидальных вектор функций в норме пространства $W_2^1(D)$.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (3)-(6) называется пара функций $\{v^\varepsilon, \omega^\varepsilon\}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $v^\varepsilon(t) =$

$= v^\varepsilon(t,x) \in L_\infty(0,T,L_2(D)) \cap L_2(0,T,V(D))$,

$\omega^\varepsilon(t) = \omega^\varepsilon(t,x) \in L_\infty(0,T,L_\infty(D))$

2) $\forall \Phi : \Phi \in L_2(0,T,V(D) \cap W_2^2(D))$, $\Phi_t \in L_2(0,T,L_2(D))$, $\Phi(T)=0$ и $\forall \varphi$: $\varphi \in L_2(0,T,W_2^1(D))$, $\varphi_t \in L_2(0,T,L_2(D))$, $\varphi(T)=0$ имеют место тождества:

$$\int_0^T \left(\varphi_t + (v^\varepsilon \cdot \nabla)\varphi - F^2(p^\varepsilon)\varphi, \omega^\varepsilon\right)_{L_2(D)} dt + \left(\varphi(0), \omega_0(x)\right)_{L_2(D)} = 0,$$

$$\mu \int_0^T (\nabla v^\varepsilon, \nabla \Phi)_{L_2(D)} dt - \int_0^T \left(\Phi_t + (v^\varepsilon \cdot \nabla)\Phi, v^\varepsilon\right)_{L_2(D)} dt + \int_0^T \left(\frac{v^\varepsilon}{\varepsilon \|v^\varepsilon\|^\beta_{L_2(D_1)}}, \Phi\right)_{L_2(D_1)} dt - \int_0^T (\omega^\varepsilon \times v^\varepsilon, \Phi)_{L_2(D)} dt = \int_0^T (f, \Phi)_{L_2(D)} dt + (v_0, \Phi(0))_{L_2(D)}.$$

Здесь $(u,v)_{L_2(D)} = \int_D uv dx$. Далее имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_2\left(0,T;L_{6/5}(\Omega)\right)$, $v_0 \in L_2(\Omega)$, $\omega_0(x) \in L_\infty(\Omega)$. *Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (3)-(6) и для него имеет место оценки:*

$$\|v^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D))} + \|v^\varepsilon\|^2_{L_2(0,T;V(D))} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|v^\varepsilon\|^{2-\beta}_{L_2(D_1)} dt \le C < \infty, \quad (7)$$

$$\|\omega^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;L_\infty(D))} \le C < \infty, \quad (8)$$

а при $\varepsilon \to 0$ *обобщенное решение задачи (3)-(6) сходится к обобщенному решению задачи (1)-(2).*

Доказательство. Оценка (8) выводится из уравнения (5) по начальным условиям, (7) выводится умножением (3) на v^ε скалярно в $L_2(D)$ и интегрированием по *t*. Далее также как в [2] доказывается следующая:

Лемма. $\forall \delta$: $0 < \delta < T - \delta$ выполняется неравенство:

$$\int_0^{T-\delta} \|v^\varepsilon(t+\delta) - v^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(D)} dt \le C\sqrt{\delta}. \quad (9)$$

Последующий ход доказательства теоремы 1 сводится к методу Галеркина[2]: по ортонормированному базису $\{\psi_k(x)\}$ в $L_2(D)$ из $V(D) \cap W_2^2(D)$ из собственных функций спектральной задачи:

$$\mu\Delta\psi_k - \nabla q_k = \lambda_k \psi_k, \quad div\psi_k = 0, \quad \psi_k|_{S_1} = 0, \quad k = 1,2,\ldots, \quad (10)$$

построим последовательность приближенных решений в виде:

$$v_N^\varepsilon(t,x) = \sum_{k=1}^N \alpha_{kN}(t)\psi_k(x), \quad (11)$$

где числовые функций $\alpha_{kN}(t)$ находятся из системы уравнений:

$$\left(\frac{\partial v_N^\varepsilon}{\partial t} + (v_N^\varepsilon \cdot \nabla) v_N^\varepsilon, \psi_k\right)_{L_2(D)} + \mu(\nabla v_N^\varepsilon, \nabla \psi_k)_{L_2(D)} + \frac{1}{\varepsilon}(v_N^\varepsilon, \psi_k)_{L_2(D_1)} = (\omega_N^\varepsilon \times v_N^\varepsilon + f, \psi_k)_{L_2(D)}, \quad k = \overline{1\ldots N}, \quad (12)$$

$$v_N^\varepsilon(t,x)\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^N (v_0(x)\psi_k(x), \psi_k(x))_{L_2(D)}, \quad (13)$$

$$\alpha_{kN}(t)\big|_{t=0} = \alpha_k = (v_0(x), \psi_k(x)),$$

$$\text{а при } x \in D_1:\ v_0(x) = 0, \quad (14)$$

а функции ω_N^ε находятся из задачи

$$\left(\omega_N^\varepsilon\right)_t + \left(\mathrm{v}_N^\varepsilon \cdot \nabla\right)\omega_N^\varepsilon + F^2\left(p_N^\varepsilon\right)\omega_N^\varepsilon = 0,$$

$$\omega_N^\varepsilon\Big|_{t=0} = \omega_0(x). \qquad (15)$$

Аналогично как в [2], [4] показываются существование решений задачи (11)-(15) (с применением теоремы о неподвижной точке Шаудера) и сходимость построенных последовательностей решений.

Определение 2. *Сильным решением задачи (3)-(6) называются функции*

$$\mathrm{v}^\varepsilon, \omega^\varepsilon,\ p^\varepsilon :\ p^\varepsilon \in L_2\left(0,T;W_2^1(D)\right),$$

$$\mathrm{v}^\varepsilon \in L_2\left(0,T;V(D)\cap W_2^2(D)\right),$$

$$\mathrm{v}^\varepsilon \in L_\infty\left(0,T;V(D)\right),\ \mathrm{v}_t^\varepsilon \in L_2\left(0,T;L_2(D)\right),$$

$$\omega_x^\varepsilon \in L_\infty\left(0,T;L_2(D)\right),$$

$$\omega_t^\varepsilon \in L_2\left(0,T;L_2(D)\right),\ \omega^\varepsilon \in L_\infty\left(0,T;L_\infty(D)\right),$$

которые квадратично суммируемы вместе с производными, входящими в (3)-(5), а также удовлетворяют почти всюду уравнениям (3)-(5) и начально-краевым условиям (6).

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset R^2$, $f \in L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right)$, $\omega_0(x) \in L_\infty(\Omega)$, $\mathrm{v}_0(x) \in V(\Omega)$. Тогда в «целом» по времени в интервале $[0,T]$ существует единственное сильное решение вспомогательной задачи (3)-(6) и для него имеют место оценки:

$$\max_{t\in[0,T]}\left(\left\|\nabla \mathrm{v}^\varepsilon\right\|_{L_2(D)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|_{D_1}^{2-\beta}\right) +$$

$$+\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^2(D)\right)} + \left\|\nabla p^\varepsilon\right\|_{L_2\left(0,T;L_2(D)\right)} \le C < \infty, \qquad (16)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left(\left\|\omega_x^\varepsilon\right\|_{L_2(D)}^2 + \left\|\omega_t^\varepsilon\right\|_{L_2(D)}^2\right) +$$

$$+\left\|\omega^\varepsilon\right\|_{L_\infty\left(0,T;L_\infty(D)\right)} \le C < \infty. \qquad (17)$$

А при $\varepsilon \to 0$ она сходится к сильному решению исходной задачи (1)-(2).

Оценки (16)-(17) выводятся аналогично [2]. Дальнейшее доказательство теоремы проводится также, как в [2].

Теорема 3. Пусть $\Omega \subset R^3$ и выполняются условия теоремы 2. Тогда в достаточно малом интервале $[0,T_0]$, значение которого определяется через начальные данные задачи, существует единственное сильное решение задачи (3)-(6) и для него имеет место оценки (16)-(17). А при $\varepsilon \to 0$ она сходится к сильному решению исходной задачи (1)-(2) со скоростью:

$$\left\|\mathrm{v}^\varepsilon - \mathrm{v}\right\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(\Omega)\right)} + \left\|\mathrm{v}^\varepsilon - \mathrm{v}\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)} +$$

$$+\left\|\omega^\varepsilon - \omega\right\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(\Omega)\right)} \le C\varepsilon^{\frac{3-2\beta}{4-3\beta}}. \qquad (18)$$

Здесь существование сильного решения в «малом» по времени показывается по схеме доказательства теоремы 2. Оценки сходимости (18) выводятся также, как в [3]: рассматривается разность уравнений (3)-(5) и (1), затем она умножается скалярно в $L_2(D)$ на $\mathrm{v}^\varepsilon - \mathrm{v}$ и $\omega^\varepsilon - \omega$ соответственно.

Итак, в модификации МФО в оценке скорости сходимости (18), при $\beta \to 1$, степень малого параметра стремится к 1. Тогда как в работе [5] показана, что при «классическом» МФО для моделей Навье-Стокса в неулучшаемой оценке скорости сходимости малый параметр ε имеет степень 1/2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вабищевич П.Н.* Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1991. 111 с.

2. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 318 с.

3. *Смагулов Ш.С., Сейлханова Р.Б., Куттыкожаева Ш.Н., Есекеева М.* Суперсходимость метода фиктивных областей // Совместный выпуск по материалам международной конференций «Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании» (18-20 сентября). – Новосибирск–Алматы, 2002. № 4(32). С. 135-140.

4. *Куттыкожаева Ш.Н.* Математическое моделирование задач гидродинамики методом фиктивных областей: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Алматы, 2006. С. 153-162.

5. *Жумагулов Б.Т., Смагулов Ш.С., Куттыкожаева Ш.Н.* Неулучшаемые оценки скорости сходимости в методе фиктивных областей для уравнения Навье-Стокса // Мат-лы IV-ой междун. Казахстанско-Российской научно-практ. конф. "Математическое моделирование научно-технологических и экологических проблем в нефтегазодобывающей промышленности", 25-26 сентября. – Алматы, 2003. С. 102-106.

Резюме

Үшөлшемді шектелген облыста біртексіз сусымалы ортаның бір стационарлық емес үлгісі үшін кіші коэффициенттері бойынша жалғастырылған жалған аймақтар әдісінің түрлендірулері қарастырылады. Кем дегенде бір жалпылама және жалғыз күшті шешімдердің бар болуы мен жинақталуы дәлелденген. Сонымен бірге, мұнда күшті шешімнің жалған аймақтар әдісінің негізгі түрімен салыстырғанда жақсартылған жинақталу жылдамдығы алынған.

Summary

Modification of the method of fictitious domains with continuation on minor coefficients for one non-stationary model of the nonuniform loose medium in the limited three-dimensional domain is considered in the given work. Existence and convergence of at least one generalized and a single strong decision are obtained. The estimation of a rate of convergence of the strong decision is deduced as well. This estimation has better level than the basic kind of the method of fictitious domains.

УДК 517.9

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 28.02.2011г.