УДК 517.968.72

Э. А. БАКИРОВА, К. И. УСМАНОВ

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методом параметризации исследуется линейная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений. Установлены коэффициентные достаточные условия существования единственного решения рассматриваемой задачи и предложен алгоритм нахождения его решения.

На отрезке $[0,T]$ рассматривается двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t) + \int_0^T K_1(t,s)x(s)ds + \int_0^T K_2(t,s)\dot{x}(s)ds + f(t), \qquad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d\ ,\ \ d \in R^n, \qquad (2)$$

где $(n \times n)$ – матрица $A(t)$ и n – вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$ соответственно непрерывны на $[0,T]\times[0,T]$; B, C – постоянные матрицы.

Требуется найти непрерывную на $[0,T]$ и непрерывно дифференцируемую на $(0,T)$ вектор-функцию $x(t)$, которая удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений (1) и граничным условиям (2).

Через $C([0,T],R^n)$ обозначим пространство непрерывных на $[0,T]$ функций $x:[0,T]\to R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$.

В настоящей работе краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений (1), (2) исследуется методом параметризации [1, 2]. На основе этого метода получены коэффициентные достаточные условия существования единственного решения краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений и предложен алгоритм ее нахождения.

Приведем схему метода параметризации применительно к задаче (1), (2). Берем шаг $h > 0$, который $N(N = 1,2,...)$ раз укладывается на отрезке $[0,T]$ и по нему произведем разбиение

$$[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N}[(r-1)h, rh).$$

Сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[(r-1)h,rh)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t)$ – система вектор-функций, определенная и совпадающая с $x(t)$ на $[(r-1)h,rh)$. Тогда исходная двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(t,s)x_j(s)ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_2(t,s)\dot{x}_j(s)ds + f(t),$$

$$t \in [(r-1)h, rh), \qquad (3)$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t\to T-0} x_N(t) = d, \qquad (4)$$

$$\lim_{t\to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \ \ s = \overline{1, N-1}. \qquad (5)$$

Здесь (5) – условия склеивания во внутренних точках разбиения $t = jh$, $j = \overline{1, N-1}$.

Если функция $x(t)$ – решение задачи (1), (2), то система его сужений $x[t] = (x_1(t), x_2(t),..., x_N(t))'$ будет решением многоточечной краевой задачи (3)–(5). И наоборот, если система вектор-функций $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{x}_1(t), \widetilde{x}_2(t),..., \widetilde{x}_N(t))'$ – решение задачи (3)–(5), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_r(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, $\widetilde{x}(T) = \lim_{t\to T-0} \widetilde{x}_N(t)$, будет решением исходной краевой задачи (1), (2).

Через λ_r обозначим значение функций $x_r(t)$ в точке $t = (r-1)h$ и на каждом интервале $[(r-1)h,rh$ произведем замену $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$, $r = \overline{1, N}$. Тогда задача (3)–(5) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r + \lambda_r] + \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(t,s)[u_j(s) +$$

$$+ \lambda_j]ds + \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_2(t,s)\dot{u}_j(s)ds + f(t), \qquad (6)$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \ \ t \in [(r-1)h, rh), \ \ r = \overline{1, N}, \qquad (7)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \lim_{t\to T-0} u_N(t) = d, \qquad (8)$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \ \ s = \overline{1, N-1}. \qquad (9)$$

Задачи (3)–(5) и (6)–(9) эквивалентны в том смысле, что если система функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t),..., x_N(t))'$ – решение задачи (3)–(5), то пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (x_1(0), x_2(h),..., x_N(N-1)h))'$, $u[t] = (x_1(t) - x_1(0), x_2(t) - x_2(h),..., x_N(t) - x_N((N-1)h))$, будет решением задачи (6)–(9). И наоборот, если пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2,..., \widetilde{\lambda}_N)'$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t),..., \widetilde{u}_N(t))'$ – решение задачи (6)–(9), то система функций $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{\lambda}_1 + \widetilde{u}_1(t), \widetilde{\lambda}_2 + \widetilde{u}_2(t),..., \widetilde{\lambda}_N + \widetilde{u}_N(t))'$, будет решением задачи (3)–(5).

Появление начальных условий $u_r[(r-1)h] = 0$, $r = \overline{1, N}$, позволяют при фиксированных значениях $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_N)'$ определить функции $u_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, из систем интегральных уравнений

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau)u_r(\tau)d\tau + \int_{(r-1)h}^{t} A(\tau)\lambda_r d\tau +$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(\tau,s)u_j(s)dsd\tau +$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(\tau,s)\lambda_j dsd\tau +$$

$$+ \int_{(r-1)h}^{t} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_2(\tau,s)\dot{u}(s)dsd\tau + \int_{(r-1)h}^{t} f(\tau)d\tau,$$

$$t \in [(r-1)h, rh), \ \ r = \overline{1, N}. \qquad (10)$$

Из (10) определив $\lim_{t\to Nh-0} u_N(t)$, $\lim_{t\to sh-0} u_s(t)$, $s = \overline{1, N-1}$, подставляя соответствующие им выражения в условия (8),(9) и умножая обе части

(8) на $h > 0$, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров λ_r, $r = \overline{1, N}$:

$$hB\lambda_1 + hC\lambda_N + hC \int_{(N-1)h}^{Nh} A(\tau)\lambda_N d\tau +$$

$$+ hC \int_{(N-1)h}^{Nh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(\tau, s)\lambda_j ds d\tau =$$

$$= hd - hC \int_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau)(\tau) d\tau -$$

$$- hC \int_{(N-1)h}^{Nh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(\tau, s) u_j(s) ds d\tau -$$

$$- hC \int_{(N-1)h}^{Nh} A(\tau) u_N(\tau) d\tau -$$

$$- hC \int_{(N-1)h}^{Nh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_2(\tau, s) \dot{u}_j(s) ds d\tau, \quad (11)$$

$$\lambda_s + \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau)\lambda_s d\tau +$$

$$+ \int_{(s-1)h}^{sh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(\tau, s)\lambda_j ds\, d\tau - \lambda_{s+1} =$$

$$= - \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau)\, u_N(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_{(s-1)h}^{sh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(\tau, s)\, u_j(s)\, ds\, d\tau -$$

$$- \int_{(s-1)h}^{sh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_2(\tau, s) \dot{u}_j(s) ds d\tau - \int_{(s-1)h}^{sh} f(\tau) d\tau,$$

$$s = \overline{1, N-1}. \quad (12)$$

Матрицу размерности $nN \times nN$, соответствующую левой части систем линейных уравнений (11), (12), обозначим через $Q(h)$. Тогда система линейных уравнений (11), (12) записывается в виде

$$Q(h)\lambda = -F(h) - G(u, h), \quad \lambda \in R^{nN}, \quad (13)$$

где

$$F(h) = \left(-hd + hC \int_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau) d\tau, \int_0^h f(\tau) d\tau, \ldots, \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} f(\tau) d\tau \right),$$

$$G(u, h) = \Bigg(hC \int_{(N-1)h}^{Nh} A(\tau) u_N d\tau +$$

$$+ hC \int_{(N-1)h}^{Nh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(\tau, s) u_j(s) ds d\tau +$$

$$+ hC \int_{(N-1)h}^{Nh} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_2(\tau, s) \dot{u}_j(s) ds d\tau,$$

$$\int_0^h A(\tau) u_1(\tau) d\tau + \int_0^h \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_2(\tau, s) u_j(s) ds d\tau +$$

$$+ \int_0^h \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K_2(\tau, s) \dot{u}_j(s) ds d\tau, \ldots, \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} A(\tau) u_{N-1}(\tau) d\tau -$$

$$+ \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau, s) u_j(s) ds d\tau +$$

$$+ \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau, s) \dot{u}_j(s) ds d\tau \Bigg).$$

Таким образом, для нахождения неизвестных пар $(\lambda, u[t])$, решения задачи (6)–(9), имеем замкнутую систему уравнений (10), (13). Решение многоточечной краевой задачи (6)–(9) найдем как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, k=0,1,2, …, определяемой по следующему алгоритму:

Шаг 0. а) Предполагая, что матрица $Q(h)$ обратима, из уравнения $Q(h)\lambda = -F(h)$ определим начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)}) \in R^{nN}$: $\lambda^{(0)} = -[Q(h)]^{-1} F(h)$.

б) Подставляя найденные $\lambda_r^{(0)}$, $r = \overline{1, N}$ в правую часть системы интегро-дифференциальных уравнений (6) и решая специальную

задачу Коши с условиями (7) находим $u^{(0)}[t]=(u_1^{(0)}(t),u_2^{(0)}(t),\ldots,u_N^{(0)}(t))'$.

Шаг 1. а) Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$, $r=\overline{1,N}$, в правую часть (13) из уравнения $[Q(h)]\lambda=-F(h)-G(u^{(0)},h)$ определим $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\ldots\lambda_N^{(1)})$.

б) Подставляя найденные $\lambda_r^{(1)}$, $r=\overline{1,N}$ в правую часть системы интегро-дифференциальных уравнений (6) и решая специальную задачу Коши с условиями (7) находим $u^{(1)}[t]=(u_1^{(1)}(t),u_2^{(1)}(t),\ldots,u_N^{(1)}(t))'$. И т.д.

Продолжая процесс, на k-шаге алгоритма находим систему пар $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, k=0,1,2, ….

Условие А. *Предположим, что интегральное уравнение Фредгольма второго рода*

$$z(t)=\int_0^T K_2(t,s)z(s)ds+F(t),\quad F(t)\in C([0,T],R^n) \tag{14}$$

однозначно разрешимо.

При условий А существует $\Gamma_2(t,s;1)$ резольвента интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром $K_2(t,s)$ и решение уравнения (14) запишется в виде

$$z(t)=F(t)+\int_0^T\Gamma(t,s;1)F(s)ds$$

и справедлива оценка

$$\|z\|_1\le\mu\|F\|_1,$$

где $\mu=T\max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}\|\Gamma(t,s;1)\|+1$.

Неизвестные функции $u[t]=(u_1(t),u_2(t),\ldots,$ $,\ldots,u_N(t))$ определяются из специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений (6) с начальными условиями (7). В отличие от задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений специальная задача Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений не всегда разрешима.

Достаточные условия однозначной разрешимости специальной задачи Коши (6),(7) при известных значениях параметров устанавливает

Теорема 1. *Пусть выполняется условие А и шаг разбиения $h=T/N$ удовлетворяет неравенству*

$$\delta(h)=e^{\alpha h}h[\mu(\alpha+\beta_1T)-\alpha]<1,$$

где $\alpha=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(t)\|$,

$$\beta_1=\max_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}\|K_1(t,s)\|,\ \alpha,\beta_1-const.$$

Тогда специальная задача Коши (6), (7) имеет единственное решение.

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, а также существование единственного решения задачи (1), (2) устанавливает

Теорема 2. *Пусть выполняется условие теоремы 1, матрица Q(h) обратима и справедливы неравенства:*

$$\|[Q(h)]^{-1}\|\le\gamma(h),$$

$$q(h)=\gamma(h)\max(1,h\|C\|)\mu h(\alpha+\beta_1T)\times$$

$$\times\frac{e^{\alpha h}-1+\delta(h)}{1-\delta(h)}<1.$$

Тогда двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений (1),(2) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы аналогично схеме доказательства теоремы 1 из [1] и проводится по вышеприведенному алгоритму с учетом специфики системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50-66.

2. *Джумабаев Д.С.* Критерий однозначной разрешимости линейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Математический журнал. 2008. Т. 8, № 2. С. 44-48.

Резюме

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есеп параметрлеу әдісімен зерттеледі. Қарастырылып отырған есептің жалғыз шешімінің бар болуының коэффициентті жеткілікті шарттары тағайындалған және ол шешімді табудың алгоритмі ұсынылған.

Summary

The linear boundary value problem for system of integro-differential equations is researched using of parametrization method. The coefficient sufficient conditions of existence unique of solution considering problem are established and algorithm finding it solution is proposed.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 11.03.2010г.