

УДК 517.5

Ш.А. БАЛГИМБАЕВА

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ПО ИНФОРМАЦИИ О СПЕКТРЕ

(Представлена академиком НАН РК Н.К. Блиевым)

Получены точные порядковые оценки для погрешности восстановления гипоэллиптического дифференциального оператора произвольного порядка с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах Никольского-Бесова по информации о спектре (преобразовании Фурье) функции.

Постановка задачи.

Будем рассматривать задачу восстановления гипоэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах Никольского - Бесова $B_{p,\theta}^s(R^n)$.

Задача линейного оптимального восстановления оператора L на множестве M со значениями в линейном нормированном пространстве X по оператору информации I заключается в нахождении (или оценке) величины

$$E(M, L, I, X) = \inf_Q \sup_{x \in M} \|L(x) - Q(x)\|_X,$$

где нижняя грань берется по всевозможным линейным отображениям $Q: I(M) \rightarrow X$. Такие отображения Q будем называть методами восстановления оператора L по информации I .

Отметим, что задача оптимального восстановления функций и их производных по информации о спектре на соболевских классах в одномерном случае на основе информации о спектре рассматривалась в [1].

Введем некоторые обозначения. Пусть N, Z, R, C - множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел соответственно; $N_0 = N \cup \{0\}$ - множество всех неотрицательных целых, $n \in N, R^n$ - n -мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$,

$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$, как обычно,

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ - скалярное произведение. Для мультииндекса $\alpha \in N_0^n$ через $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ обозначим его длину.

Рассмотрим квазиоднородные гипоэллиптические операторы (к ним принадлежит, например, оператор теплопроводности вида: $\partial u / \partial t - \partial^2 u / \partial x_1^2 - \dots - \partial^2 u / \partial x_n^2 = 0$).

Напомним определение гипоэллиптического оператора (см., например, [2]).

Пусть $M = (M_1, \dots, M_n)$ - вектор с натуральными компонентами, $|M| = M_1 + \dots + M_n$. Сопоставим каждому полиному с комплексными коэффициентами

$P(z), z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n (n \geq 1), C^1 := C$, линейный дифференциальный оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами в R^n , где z_j за-

меняется на $D_j := -i \frac{\partial}{\partial x_j}$ при каждом $j = \overline{1, n}$

Определение 1. Полином $P(z)$ (оператор $P(D)$) называется M -однородным, если $\exists m \in N_0$, что

$$P(z) \equiv \sum_{|kM|=m} a_k z^k,$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in N_0, j = \overline{1, n}$, $F^{-1}(f)$.

$$|kM| = k_1 M_1 + \dots + k_n M_n, \quad z^k = z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}.$$

Определение 2. Оператор $P(D)$ называется квазиоднородным, если он M – однороден при некотором натуральном M .

Определение 3. Оператор называется гипоэллиптическим, если для любых области

$G \subset R^n$ и функции $f \in C^\infty(R^n)$ каждое обобщенное решение уравнения $P(D)g = f$ является функцией класса $C^\infty(G)$.

Пусть

$$L := P = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (-i)^\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

гипоэллиптический оператор.

Пусть $s = (s_1, \dots, s_n)$ – вектор такой что,

$$s_i > 0, \forall i = \overline{1, n}.$$

Определим число s как среднее гармоническое чисел s_1, \dots, s_n следующим образом

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i}. \text{ Далее, } \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) – \text{ вектор с координатами}$$

$$a_i := \frac{s}{s_i}. \quad \text{Пусть}$$

$$\|x\|_a := \max_i |x_i|^{\frac{1}{a_i}} \approx \left(\sum_i |x_i|^{\frac{2}{a_i}} \right)^{1/2} – \text{анализо-ролное расстояние.}$$

Пусть $S(R^n), S'(R^n)$ – пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых быстроубывающих комплекснозначных функций и медленно растущих распределений (обобщенных функций) на R^n соответственно, $D(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω .

Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in S'(R^n)$ обозначим через $F(f)$. Обратное преобразование Фурье обозначим через

Для $f \in S'(R^n)$ рассмотрим сужение $F(f)$

на $\Omega_\sigma := \left\{ \xi : |\xi|_a < \sigma \right\} \subset R^n$ как сужение обобщенной функции, т.е. как линейный непрерывный функционал над пространством $D(\Omega_\sigma)$. Обозначим данное сужение через $F(f)|_{\Omega_\sigma}$.

Определим анизотропное пространство Никольского - Бесова $B_{p,\theta}^s(R^n)$ (см., например, [3, 4]).

Приведем определение, использующее метод декомпозиции.

Обозначим через

$$\Pi_j := \left\{ \xi \in R^n : \|\xi\|_a \leq \frac{2\pi}{3} 2^j \right\}, j \in N,$$

$$\Gamma_1 := \Pi_2, \quad \Gamma_j := \Pi_{j+1} \setminus \Pi_j, j \geq 2.$$

Рассмотрим гладкое анизотропное разбиение единицы, т.е. семейство функций $\{\nu_j(\xi)\}_{j=1}^\infty$ таких, что

1. $\nu_j(\xi) \geq 0, \nu_j(\xi) \in C^\infty(R^n), j \in N;$
2. $\text{supp } \nu_j \subset \Gamma_j;$
3. $2^{j|\alpha|_a} |D_\xi^\alpha \nu_j(\xi)| \leq C_\alpha, \forall \alpha \in N, \xi \in R^n;$
4. $\sum_{j=1}^\infty \nu_j(\xi) = 1.$

$$\text{Пусть } V_j(x) := (F^{-1}\nu_j)(x).$$

Определение 1. Функция f принадлежит пространству $B_{p,\theta}^s := B_{p,\theta}^s(R^n)$, $1 \leq \theta < \infty$, $0 < p < \infty$, если $f \in S'(R^n)$ и для нее конечна (квази)норма

$$\|f|B_{p,\theta}^s\| = \left\| \left\{ 2^{js} |f * V_j| \right\}_1^\infty \right\|_{l_\theta(L_p)}.$$

Здесь

$$\|f_j|l_\theta(L_p)\| = \left\| \|f_j|L_p\| l_\theta \right\| =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{R^n} |f_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{\theta}.$$

Нами рассматривается задача восстановления гипоэллиптического оператора с постоянными коэффициентами L в пространстве

$$B_{p,\theta}^s(R^n).$$

В качестве информации о функциях $f \in B_{p,\theta}^s(R^n)$ используется сужение преобразования Фурье $F(f)|_{\Omega_\sigma}$. Таким образом, предполагаются известными значения функционала $F(f)$ на любых функциях из $D(\Omega_\sigma)$.

Тогда задача восстановления состоит в оценке величины

$$\begin{aligned} E(B_{p,\theta}^s, L, F(f)|_{\Omega_\sigma}, B_{p,\theta}^t(R^n)) &= \\ &= \inf_Q \sup_{\|f\|_{B_{p,\theta}^s} \leq 1} \|L - Q F(f)|_{\Omega_\sigma}\|_{B_{p,\theta}^t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где нижняя грань берется по всевозможным линейным методам $Q : F(B_{p,\theta}^s)|_{\Omega_\sigma} \rightarrow B_{p,\theta}^t(R^n)$,

и указании линейного метода \tilde{Q} , на котором реализуется порядок величины (1).

В качестве (линейного) метода приближенного восстановления оператора L , использующего информацию $F(f)|_{\Omega_\sigma}$ о функции $f \in B_{p,\theta}^s(R^n)$, будем рассматривать специальную «частную» сумму ее разложения по базису, построенному в [5] на основе всплесков Мейера-Давида.

Предварительные сведения .

Сформулируем некоторые известные факты, которые использованы в работе. Верна теорема (см. [3])

Теорема A. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Тогда $f \in B_{p,\theta}^s(R^n)$ тогда и только тогда, когда

f регулярна в смысле L_p и ее (сходящийся к ней слабо) ряд

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k,$$

где β_k – целая функция экспоненциального типа a^{k/s_j} по x_j , таков, что

$$\|f|_{B_{p,\theta}^s(R^n)}\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^{k\theta} \|\beta_k\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty.$$

2. Опишем систему, использующую всплески Мейера-Давида и являющуюся базисом в анизотропном пространстве Никольского –Бесова, следяя работе [5].

Пусть $\omega(\xi)$ четная функция. Преобразование Фурье масштабной функции Мейера-Давида φ определяется как

$$F(\varphi)(\xi) = \begin{cases} \cos(\omega(\xi)), & |\xi| \leq \frac{2\pi h(h+1)}{2h+1} \\ 0, & |\xi| > \frac{2\pi h(h+1)}{2h+1} \end{cases},$$

Всплеск Мейера -Давида определяется из равенства

$$F(\psi)(\xi) = e^{-i\xi/2} \sin(\omega(\xi)).$$

Обозначим

$$\Psi^{(\varepsilon_i)}(t) = \begin{cases} \psi(t), & \varepsilon_i = 1, \\ \varphi(t) & \varepsilon_i = 0. \end{cases}$$

С помощью сдвигов и растяжений определим всплески

$$\psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x) = \prod_i b^{m_i/2} \Psi^{(\varepsilon_i)}(b^{m_i} x_i - k_i^{(\varepsilon_i)}),$$

$$\text{где } m, k \in \mathbb{Z} \quad k_i^{(\varepsilon_i)} = \begin{cases} k_i, & \varepsilon_i = 1, \\ k_i/h, & \varepsilon_i = 0. \end{cases}$$

Множество $\Psi_j := \{\psi_{mk}^{(\varepsilon)}\}_{(m,k,\varepsilon) \in M_j}$ называется

j -м блоком. Система $\Psi := \bigcup_{j=1}^{\infty} \Psi_j$ такая, что

$$\bigcup_{\psi_{mk}^{(\varepsilon)} \in \Psi} \text{supp } F\psi_{mk}^{(\varepsilon)} \subset \Gamma_j \cup \Gamma_{j+1}.$$

В работе [5] доказана важная для наших дальнейших построений теорема о базисности системы Ψ в анизотропном пространстве Никольского–Бесова

Теорема В. Система всплесков Ψ ортонормирована в $L_2(R^n)$ и образует безусловный базис в $B_{p,\theta}^s(R^n)$, т.е. любая функция разлагается в ряд Фурье

$$f = \sum_{j \in N} \sum_{(m,k,\varepsilon) \in M_j} c_{mk}^{(\varepsilon)}(f) \psi_{mk}^{(\varepsilon)}\{x\},$$

Причем

$$\begin{aligned} \|f|_{B_{p,\theta}^s(R^n)}\| &\approx \\ &\approx \left(\sum_{j \in N} 2^{\pm sj\theta} \sum_{(m,\varepsilon) \in N_j} |b|^{\frac{m}{2} - \frac{1}{p})\theta} \left(\sum_{k \in Z^n} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|^p \right)^{\frac{\theta}{p}} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Основной результат.

В качестве метода приближенного восстановления оператора L рассмотрим следующий оператор $LS_\sigma[F(f)|_{\Omega_\sigma}]$:

$$LS_\sigma[F(f)|_{\Omega_\sigma}] = L \left(\sum_{j \leq j_\sigma} \sum_{(m,k,\varepsilon) \in M_j} c_{mk}^{(\varepsilon)}(f) \psi_{mk}^{(\varepsilon)}\{x\} \right),$$

где $c_{jk}^{(\varepsilon)}(f) = (f, \psi_{jk}^{(\varepsilon)})$ – коэффициенты Фурье f по системе Ψ , а $j_\sigma = \left[\log_2 \frac{3\sigma}{4\pi} \right] - 2$. Метод $LS_\sigma[F(f)|_{\Omega_\sigma}]$ использует информацию только о $F(f)|_{\Omega_\sigma}$.

Основной результат настоящей статьи содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$,

$$r \geq p, \quad 0 < t < s\kappa, \quad \text{где } \kappa = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s_i}. \quad \text{Тогда}$$

для метода восстановления $LS_\sigma[F(f)|_{\Omega_\sigma}]$ справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} E(B_{p,\theta}^s, L, F(f)|_{\Omega_\sigma}, B_{p,\theta}^t(R^n)) &\equiv \\ &\equiv \sup_{\|f|_{B_{p,\theta}^s}\| \leq 1} \|Lf - LS_\sigma[F(f)|_{\Omega_\sigma}]|_{B_{p,\theta}^t}\| \equiv 2^{-j_\sigma(s\kappa-t)}. \end{aligned}$$

Запись $A \equiv B$ означает, что существуют константы $C_1, C_2 > 0$: $A \leq C_1 B \leq C_2 A$.

Доказательство. Приведем схему получения оценки сверху. Выше через $LS_\sigma[F(f)|_{\Omega_\sigma}]$ мы обозначили действие оператора дифференцирования на специальную «частную» сумму разложения в ряд по всплескам Мейера–Давида. Далее для краткости будем обозначать $LS_\sigma(f) := LS_\sigma[F(f)|_{\Omega_\sigma}]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} LS_\sigma(f) &= L \left(\sum_{j \leq j_\sigma} \sum_{(m,k,\varepsilon) \in M_j} c_{mk}^{(\varepsilon)}(f) \psi_{mk}^{(\varepsilon)}\{x\} \right) = \\ &= \sum_{j \leq j_\sigma} \sum_{(m,k,\varepsilon) \in M_j} c_{mk}^{(\varepsilon)}(f) L \psi_{mk}^{(\varepsilon)}\{x\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим норму разности $\|Lf - LS_\sigma[F(f)|_{\Omega_\sigma}]\|_X$, где X – банаово пространство. Используя линейность операторов L , $S_\sigma[F(f)|_{\Omega_\sigma}]$ и применяя теорему В для g_f – целой функции экспоненциального типа $2^{j_\sigma+1}$, на которой реализуется наилучшее приближение функции $f \in B_{p,\theta}^s(R^n)$, получим:

$$\begin{aligned} \|Lf - LS_\sigma(f)\|_X &\leq \|Lf - Lg_f\|_X + \|Lg_f - LS_\sigma(g_f)\|_X + \\ &+ \|LS_\sigma(g_f) - LS_\sigma(f)\|_X \leq \|L(f - g_f)\|_X (1 + \|S_\sigma\|_X) \end{aligned}$$

Пусть $X = B_{p,\theta}^s(R^n)$. Функция $f - g_f \in B_{p,\theta}^s(R^n)$, следовательно по теореме А справедливо представление

$$f - g_f = \sum_{j \geq j_\sigma + 1} \beta_j.$$

Очевидно,

что

$$L(f - g_f) \in B_{p,\theta}^{sk}(R^n) \subset B_{p,\theta}^t(R^n), \quad \text{где}$$

$0 < t < sk$. Теперь, используя эквивалентную нормировку, приведенную в теореме А и неравенство Бернштейна, получим оценку сверху.

При получении оценки снизу строятся “плохие” функции из единичного шара пространства

$B_{p,\theta}^s(R^n)$, на которых реализуется порядок, комбинированием теоремы представления А и теоремы В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Magaril-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных// Функциональный анализ и его приложения. 2003. Т.37. вып.3. с.51-64.

2. Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т 1. М., Мир, 1984, 360 с.

3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.,Наука., 1997. 456с.

4. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М., Мир., 1986. 448с.

5. Новиков И.Я., Берколайко М.З. Базисы всплесков и линейные операторы в анизотропных пространствах Лизоркина-Трибеля//Труды МИ РАН. 1995. Т.210. С. 5-30.

Резюме

Анизотроптық Никольский – Бесов кеңістіктерінде гипоэллиптик дифференциалдық операторын спектр туралы ақпар бойынша қалпына келтіру әдісінің накты реттік бағалаулары алынды.

Summary

Exact (in order sense) estimates for error bounds of a recovery method using spectral information for operator of gipoelliptic type of the any order with constant coefficients on the anisotropic Nikol'skii – Besov spaces are received.

Институт Математики
ИМИМ МОН РК,
г. Алматы,

Поступила 28.09.09