УДК 517.5

Ш. А. БАЛГИМБАЕВА, Ж. М. НУРМУХАМЕДОВА

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА КЛАССАХ ГЛАДКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Институт математики, г. Алматы

(Представлена академиком НАН РК Н. К. Блиевым)

Рассматривается задача линейного оптимального восстановления оператора $d^{\alpha}/dx^{\alpha}, \alpha \in \mathsf{N}$, *на классах Никольского–Бесова* $\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ *и Лизоркина–Трибеля* $\mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ *периодических функций в метрике одного из следующих пространств:* $L_q(\mathbf{T})$ *при условии* $\alpha < s$, $B^t_{q\tau}(\mathbf{T})$ *или* $F^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ *при условии* $s-t-\alpha > (1/p-1/q)_+$. *В качестве информации о функциях из этих классов используется набор коэффициентов Фурье с номерами из* $[-\sigma,\sigma]$.

1. Введение. Постановка задачи. Напомним, что задача линейного оптимального восстановления оператора L на множестве F со значениями в линейном нормированном пространстве X по оператору информации I заключается в следующем. Требуется найти (или оценить) величину

$$\mathsf{E}(F,L,I,X) = \inf_{Q} \sup_{x\in F} \|L(x) - Q(I(x))\|_X$$

– линейное оптимальное восстановление, где нижняя грань берется по всевозможным линейным отображениям Q: $I(F) \to X$. Такие отображения Q называются методами восстановления оператора L по информации I.

В работе В. В. Арестова [1] дан весьма полный и детальный обзор результатов и методов, относящихся к задаче С. Б. Стечкина о приближении (вообще говоря, неограниченного) оператора ограниченными линейными операторами на классах функций и родственным экстремальным задачам. В частности, в этом контексте подробно изучены операторы, инвариантные относительно сдвига, в пространствах $L_p(\mathbf{R}^n), 1 \le p \le \infty$. Отметим, что дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, задаче восстановления одного из которых посвящена данная работа, составляют важный класс операторов, инвариантных относительно сдвига.

Задача оптимального восстановления оператора дифференцирования на классах Соболева периодических функций одной переменной по информации о спектре (коэффициентах Фурье), по-видимому, впервые рассматривалась Г. Г. Магарил–Ильяевым и К. Ю. Осипенко [2]. А именно, в [2] рассматривается задача оптимального восстановления функций и их производных по приближенным значениям коэффициентов Фурье: вычисляется точное значение величины оптимального восстановления и приводятся явные выражения оптимальных методов восстановления для классов гладких и аналитических функций, определенных на различных компактных многообразиях.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального по порядку восстановления оператора дифференцирования на классах Никольского–Бесова периодических функций по информации о спектре (коэффициентах Фурье) функции.

Введем некоторые обозначения. Пусть **N**, **Z**, **R** и **C** – множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел соответственно; $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$; $\mathbf{T} := [0,2\pi)$ – период.

$L_p := L_p(\mathbf{T})$ $(1 \le p < \infty)$ — пространство 2π-периодических функций f, суммируемых в степени p по периоду с нормой

$$\| f \|_p = \{(2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{T}} | f(x) |^p \, dx\}^{1/p};$$

ℓ_θ $(1 \le \theta \le \infty)$ – пространство числовых последовательностей $\{a_j\}_{j \in \mathbf{N}_0}$ с конечной нормой

$$\left\| \{a_j\} \right\|_{\ell_\theta} = \{ \sum_{j \in \mathbf{N}_0} | a_j |^\theta \}^{1/\theta}, \ 1 \le \theta < \infty; \quad \left\| \{a_j\} \right\|_{\ell_\infty} = \sup_{j \in \mathbf{N}_0} | a_j |;$$

$\ell_\theta(L_p(\mathbf{T}))$ – пространство функциональных последовательностей $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}_0}, x \in \mathbf{T}$, с конечной нормой

$$\left\| \{f_k\} | \ell_\theta(L_p) \right\| = \left\| \{ \left\| f_k | L_p \right\| \} | \ell_\theta \right\|;$$

$L_p(\mathbf{T}; \ell_\theta)$ – пространство функциональных последовательностей $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}_0}, x \in \mathbf{T}$, с конечной нормой

$$\left\| \{f_k\} | L_p(\mathsf{T}; \ell_\theta) \right\| = \left\| \left\| \{f_k\} | \ell_\theta \right\| | L_p \right\|$$

(с обычной модификацией при $\theta = \infty$).

Пусть $D(\mathbf{T}) := C^\infty(\mathbf{T})$ – пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на $\mathbf{T}$ (пробных функций); $D'(\mathbf{T})$ – двойственное пространство периодических распределений (обобщенных функций), т.е. линейное пространство непрерывных линейных функционалов на $D(\mathbf{T})$.

Значение распределения $f \in D'(\mathbf{T})$ на пробной функции $g \in D(\mathbf{T})$ будем обозначать через $\langle f, g \rangle$. Тогда коэффициенты Фурье $f \in D'(\mathbf{T})$ задаются соотношением

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1} \langle f, e^{-ikx} \rangle, \ k \in \mathbf{Z};$$

в частности, для $f \in L_1$

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{T}} f(x) e^{-ikx} dx, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Приведем определение периодических пространств Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля. Пусть $\Phi(\mathsf{R}) = \{\varphi\}$, где $\varphi = \{\varphi_j(x)\}_{j \in \mathbf{N}_0} \subset \mathsf{S}(\mathbf{R})$ ($\mathsf{S}(\mathbf{R})$ – пространство Шварца) и такие, что:

1) $\operatorname{supp} \varphi_0 \subset \{x \,|\, |x| \le 2\}$;

$\operatorname{supp} \varphi_j \subset \{x \,|\, 2^{j-1} \le |x| \le 2^{j+1}\}, \ j = 1, 2, \ldots;$

2) $\exists c_\alpha > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}$:

$$2^{j\alpha} \, | D^\alpha \varphi_j(x) | \le c_\alpha, \quad j = 0, 1, \ldots, \ \forall x \in \mathbf{R};$$

3) $\sum_{j \in \mathsf{N}_0} \varphi_j(x) = 1$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

Система $\{\varphi_j(x)\}_{j \in \mathbf{N}_0}$ – гладкое диадическое разбиение единицы.

Определение. Пусть $-\infty < s < \infty$, $1 \le p < \infty, 1 \le \theta \le \infty$. Пусть $\{\varphi_j(x)\}_{j \in \mathbf{N}_0} \in \Phi(\mathbf{R})$.

i) пространство Никольского–Бесова $B^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ состоит из всех периодических обобщенных функций $f \in D'(\mathbf{T})$, для которых конечна норма

$$\left\| f | B^s_{p\theta} \right\| = \left\| 2^{sj} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varphi_j(k) \hat{f}(k) e^{ikx} | \ell_\theta(L_p(\mathbf{T})) \right\|; \tag{1}$$

ii) пространство Лизоркина–Трибеля $F^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ состоит из всех периодических обобщенных функций $f \in D'(\mathbf{T})$, для которых конечна норма

$$\left\| f \,|\, F_{p\theta}^s \right\| = \left\| 2^{sj} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi_j(k) \hat{f}(k) e^{ikx} \,|\, L_p(\mathbf{T}, \ell_\theta) \right\|. \qquad (2)$$

Классом Никольского–Бесова $\mathsf{B}_{p\theta}^s(\mathbf{T})$ (Лизоркина–Трибеля $\mathsf{F}_{p\theta}^s(\mathbf{T})$) будем называть единичный шар пространства $B_{p\theta}^s(\mathbf{T})$ ($F_{p\theta}^s(\mathbf{T})$), т.е.

$$\mathsf{B}_{p\theta}^s(\mathbf{T}) = \{f \in B_{p\theta}^s(\mathbf{T}) : \left\| f | B_{p\theta}^s \right\| \le 1\} \quad (\mathsf{F}_{p\theta}^s(\mathbf{T}) = \{f \in F_{p\theta}^s(\mathbf{T}) : \left\| f | F_{p\theta}^s \right\| \le 1\}).$$

Замечание. Классическое определение пространства Никольского-Бесова положительной гладкости (т.е. при $s > 0$), использующее конечные разности или соответствующие модули гладкости функции, см., например, в [3, гл. 4]; в случае произвольной гладкости (т.е. при любом $s \in \mathbf{R}$) определение пространств Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля с помощью гладкого двоичного «разбиения единицы», приведенное выше, принадлежит Х. Трибелю (подробнее см. [4, Ch. 3]).

Рассмотрим (формально) следующие декомпозиции периодической обобщенной функции $f \in D'(\mathbf{T})$ по двоичным "пачкам" :

$$f(x) = \hat{f}(0) + \sum_{m\in\mathbf{N}} \delta_m^+(f,x) + \sum_{m\in\mathbf{N}} \delta_m^-(f,x) = \sum_{m\in\mathbf{N}_0} \delta_m(f,x), \qquad (3)$$

здесь $\delta_m^\varepsilon(f,x) = \sum_{\varepsilon k = 2^{m-1}}^{2^m - 1} \hat{f}(k) e^{ikx}$, $\varepsilon = \pm 1$; $\delta_m(f,x) = \delta_m^-(f,x) + \delta_m^+(f,x)$, $\delta_0(f,x) = \hat{f}(0)$.

Приведем теорему характеризации пространств Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля с помощью декомпозиции по двоичным "пачкам" , принадлежащую П. И. Лизоркину (см., например, [3]).

Теорема А. *Пусть* $s \in \mathbf{R}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

i) Функция f принадлежит пространству $B_{p\theta}^s(\mathbf{T})$ *тогда и только тогда, когда конечна величина*

$$\left\| \{2^{sm} \delta_m(f,x)\} | \ell_\theta(L_p) \right\|, \qquad (4)$$

причем функционал (4) является эквивалентной нормой для пространства Никольского–Бесова;

ii) Функция f принадлежит пространству $F_{p\theta}^s(\mathbf{T})$ *тогда и только тогда, когда конечна величина*

$$\left\| \{2^{sm} \delta_m(f,x)\} | L_p(\ell_\theta) \right\|, \qquad (5)$$

причем функционал (5) является эквивалентной нормой для пространства Лизоркина–Трибеля.

Итак, здесь изучается задача оптимального восстановления оператора дифференцирования $\mathsf{D}^\alpha := d^\alpha / dx^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{N}$, действующего из $\mathsf{B}_{p\theta}^s(\mathbf{T})$ в $L_q(\mathbf{T})$, при условии, что $\alpha < s$, или в $B_{q\tau}^t(\mathbf{T})$, при условии, что $s - t - \alpha > (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+, \tau \ge \theta$. В качестве оператора информации будем рассматривать (линейное) отображение $I_\sigma : D'(\mathbf{T}) \to \mathbf{R}^{2[\sigma]+1} : f \to I_\sigma(f) = \{\hat{f}(k) : k \in \mathsf{Z} \cap [-\sigma, \sigma]\}$, т.е. $I_\sigma(f)$ – набор коэффициентов Фурье $\hat{f}(k)$ периодического распределения $f \in D'(\mathbf{T})$ с номерами из $[-\sigma, \sigma]$.

Далее запись $A \cong B$ означает, что существуют константы $C_1, C_2 > 0$: $C_1 A \le B \le C_2 A$.

2. Предварительные сведения. В дальнейшем мы часто будем использовать следующие классические неравенства для тригонометрических полиномов: неравенство разных метрик С. М. Никольского [5, с. 256] (см. также [3, с. 125]) и неравенство для производных С. Н. Бернштейна (см. [3, с. 94]).

Пусть

$$T_N = \left\{ t(x) = \sum_{|k| \le N} c_k e^{ikx} | c_k \in \mathbf{C}, |k| \le N \right\}$$

– пространство тригонометрических полиномов порядка N.

Теорема B. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $t(x) \in T_N$ *имеют место неравенства:*

$$\| t \|_q \le 2N^{1/p - 1/q} \| t \|_p; \tag{6}$$

$$\| t' \|_p \le N \| t \|_p. \tag{7}$$

Теорема C. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда существуют положительные постоянные* c_p, C_p *такие, что для любой функции* $f \in L_p$ *верно неравенство*

$$c_p \|f\|_p \le \left\| \{\delta_m(f,x)\} | L_p(\ell_2) \right\| \le C_p \|f\|_p.$$

Теорема B – это классическая теорема Литтлвуда–Пэли, доказательство которой см., например, в [6].

В работе [7] построена система (типа всплесков) тригонометрических полиномов $\Psi := \{\psi_{00}, \psi_{mr}^{\varepsilon}\}, (m,r,\varepsilon) \in \mathrm{M} := \{(m,r,\varepsilon) : m \ge 1, r = 0,\ldots,2^{m-1}-1;\ \varepsilon = \pm 1\}$

$$\psi_{00}(x) = 1;\ \psi_{mr}^{\varepsilon}(x) = 2^{-m+1} \sum_{\varepsilon k = 2^{m-1}}^{2^m - 1} e^{ik(x - t_{rm})},\ \ t_{rm} = (2r+1)2^{-(m-1)}\pi,\ \ (m,r,\varepsilon) \in \mathrm{M}.$$

П. И. Лизоркин [7] установил, что эта система является безусловным базисом пространства $B_{p\theta}^{s}(\mathbf{T})$ при $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $s \in \mathbf{R}$, и любая функция f из этого пространства представима в виде ряда:

$$f(x) = \psi_{00}(x) + \sum_{(m,r,\varepsilon) \in \mathrm{M}} \hat{f}_{\psi}^{\varepsilon}(m,r) \psi_{mr}^{\varepsilon}(x), \tag{8}$$

где $\hat{f}_{\psi}^{\varepsilon}(m,r) = 2^{m-1}\pi^{-1}(f, \psi_{mr}^{\varepsilon}) = \sum_{\varepsilon k = 2^{m-1}}^{2^m - 1} \hat{f}(k) e^{ikt_{rm}}$.

Отметим,что ортонормированная система $\Psi_m^{\varepsilon} := \{\psi_{mr}^{\varepsilon} : r = 0,\ldots,2^{m-1}-1\}$ $(\varepsilon = \pm 1, m \in \mathbf{N}_0)$ – это система тригонометрических полиномов порядка $2^m - 1$, представимых через сдвиги "одностороннего" ядра Дирихле.

Легко видеть, что $\forall f \in L_1(\mathbf{T})$ и $\forall m \in \mathbf{N}_0$

$$\sum_{\varepsilon = \pm 1} \sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} \hat{f}_{\psi}^{\varepsilon}(m,r) \psi_{mr}^{\varepsilon}(x) = \delta_m(f,x).$$

Приведем два утверждения из [7], которые будут использованы ниже.

Теорема D [7]. *Для "пачки"* $\delta_m^{\varepsilon}(f,x)$ *ряда Фурье (8) справедливы оценки:*

$$A_p \left\| \delta_m^{\varepsilon}(f,x) \right\|_p \le \left(2^{-m} \sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_{\psi}^{\varepsilon}(m,r)|^p \right)^{1/p} \le B_p \left\| \delta_m^{\varepsilon}(f,x) \right\|_p,$$

где постоянные $0 \le A_p \le B_p < \infty$ не зависят от m.

Теорема F [7]. *Пусть* $s \in \mathbf{R}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Для того чтобы периодическая обобщенная функция* $f \in D'(\mathbf{T})$ *принадлежала пространству* $B_{p\theta}^{s}(\mathbf{T})$, *необходимо и достаточно, чтобы она представлялась слабо сходящимся рядом (8), с коэффициентами* $\hat{f}_{\psi}^{\varepsilon}(m,r)$, *удовлетворяющими условию*

$$\beta_{p\theta}^{s} = \left[\sum_{m \in \mathbf{N}} 2^{m(s - 1/p)\theta} \left\{ \sum_{\varepsilon = \pm 1} \sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_{\psi}^{\varepsilon}(m,r)|^p \right\}^{\theta/p} \right]^{1/\theta} < \infty,\ 1 \le \theta < \infty;$$

$$\beta^s_{p\infty} = \sup_{m\in\mathbf{N}} 2^{m(s-1/p)} \left\{ \sum_{\varepsilon=\pm1} \sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}^{\varepsilon}_{\psi}(m,r)|^p \right\}^{1/p} < \infty.$$

При этом ряд (8) сходится по норме $B^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ *(при* $\theta<\infty$*) и величина* $\left\{|\hat{f}^{\varepsilon}_{\psi}(0,0)|^{\theta} + (\beta^s_{p\theta})^{\theta}\right\}^{1/\theta}$ *эквивалентна норме* f *в* $B^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ $(1\le\theta\le\infty)$.

3. Основные результаты. При исследовании вопроса о восстановлении оператора дифференцирования D^{α} в качестве линейного метода, использующего информацию I_{σ} о функциях $f\in \mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})$, будем рассматривать действие оператора D^{α} на соответствующую частную сумму разложения в ряд по системе Ψ. Точнее, рассмотрим следующий метод восстановления оператора D^{α}:

$$Q(I_{\sigma}(f))(x) := (\mathsf{D}^{\alpha} S_{\sigma}(f))(x) := \mathsf{D}^{\alpha}\left(\sum_{(m,r,\varepsilon)\in \mathrm{M}'(\sigma)} \hat{f}^{\varepsilon}_{\psi}(m,r)\psi^{\varepsilon}_{mr}(x)\right).$$

Теорема 1. Пусть $1<p,q<\infty, 1\le\theta,\tau<\infty$. Тогда справедливы оценки:

i) если $s-t-\alpha > (\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+$, то

$$\mathsf{E}(\mathsf{B}^s_{p\theta}, \mathsf{D}^{\alpha}, I_{\sigma}, B^t_{q\tau}) \approx \sup_{f\in \mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})} \left\| \mathsf{D}^{\alpha} f - Q(I_{\sigma}(f)) | B^t_{q\tau}\right\| \cong 2^{-m_{\sigma}(s-t-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+)}, \tag{9}$$

ii) если $s-\alpha > (\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+$, то

$$\mathsf{E}(\mathsf{B}^s_{p\theta}, \mathsf{D}^{\alpha}, I_{\sigma}, L_q) \approx \sup_{f\in \mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})} \left\| \mathsf{D}^{\alpha} f - Q(I_{\sigma}(f))\right\|_q \cong 2^{-m_{\sigma}(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+)}. \tag{10}$$

Доказательство. I. Оценки сверху.

i) Сначала получим оценку сверху в (9).

Так как $f\in \mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})$, то

$$f - S_{\sigma}(f) = \sum_{(m,r,\varepsilon)\in \mathrm{M}''(\sigma)} \hat{f}^{\varepsilon}_{\psi}(m,r)\psi^{\varepsilon}_{mr}(x) \in B^s_{p\theta}(\mathbf{T}),$$

а $\mathsf{D}^{\alpha}(f-S_{\sigma}(f)) \in B^{s-\alpha}_{p\theta}(\mathbf{T}) \subset B^t_{q\tau}(\mathbf{T}), s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+ > t.$

С учетом теоремы А и определения системы Ψ имеем:

$$\left\|\mathsf{D}^{\alpha}(f-S_{\sigma}(f))|B^t_{q\tau}(\mathbf{T})\right\| = \left\|\mathsf{D}^{\alpha} \sum_{(m,r,\varepsilon)\in \mathrm{M}''(\sigma)} \hat{f}^{\varepsilon}_{\psi}(m,r)\psi^{\varepsilon}_{mr} | B^t_{q\tau}(\mathbf{T})\right\| =$$

$$\left\|\mathsf{D}^{\alpha}[\sum_{m\ge m_{\sigma}+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} \hat{f}^{\varepsilon}_{\psi}(m,r)\psi^{\varepsilon}_{mr}] | B^t_{q\tau}(\mathbf{T})\right\| =$$

$$\left\|\mathsf{D}^{\alpha}[\sum_{m\ge m_{\sigma}+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}\delta^{\varepsilon}_m(f,x)] | B^t_{q\tau}(\mathbf{T})\right\| = \left\|\sum_{m\ge m_{\sigma}+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}\mathsf{D}^{\alpha}\delta^{\varepsilon}_m(f,x) | B^t_{q\tau}(\mathbf{T})\right\| =$$

$$[\sum_{m\ge m_{\sigma}+1}\sum_{\varepsilon=\pm1} 2^{mt\tau}\left\|\mathsf{D}^{\alpha}\delta^{\varepsilon}_m(f,x)\right\|_q^{\tau}]^{1/\tau} =: \mathsf{J}.$$

Так как $\delta_m^{\varepsilon}(f,x)$ – тригонометрический полином порядка 2^m, то по неравенству Бернштейна (7) имеем:

$$\left\|D^{\alpha}\delta_m^{\varepsilon}(f,x)\right\|_q \le 2^{m\alpha}\left\|\delta_m^{\varepsilon}(f,x)\right\|_q. \tag{11}$$

1. Пусть $p<q$ и $\theta\le\tau<\infty$.

Оценим J с учетом (11):

$$J\le\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}2^{mt\tau}2^{m\alpha\tau}\left\|\delta_m^{\varepsilon}(f,x)\right\|_q^{\tau}\right]^{1/\tau}\cong$$

$$\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{mt\tau}2^{-m\frac{\tau}{q}}2^{m\alpha\tau}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat f_{\psi}^{\varepsilon}(m,r)|^q\right]^{\tau/q}\right]^{1/\tau}=:J_1.$$

Применим неравенство Йенсена сначала к внутренней, а затем к внешней сумме:

$$J_1\le\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{m(t+\alpha-\frac{1}{q})\theta}2^{-m(s-\frac{1}{p})\theta}2^{m(s-\frac{1}{p})\theta}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat f_{\psi}^{\varepsilon}(m,r)|^p\right]^{\theta/p}\right]^{1/\theta}=$$

$$2^{-m_\sigma(s-t-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left\|f|B_{p\theta}^{s}\right\|=2^{-m_\sigma(s-t-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

2. Пусть $p<q$ и $1\le\tau<\theta$, то в J_1, применив сначала неравенство Йенсена к внутренней сумме, а затем неравенство Гельдера с показателем θ/τ, получим требуемую оценку.

3. Пусть $p<q$ и $\tau=\infty$.

Тогда

$$J_1\le\sup_{m\in\mathbf{N}}2^{m(s-\frac{1}{p})}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat f_{\psi}^{\varepsilon}(m,r)|^p\right]^{1/p}\times$$

$$\times\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{m\theta(t+\alpha-\frac{1}{q})}2^{-m(s-\frac{1}{p})\theta}\right]^{1/\theta}=2^{-m_\sigma(s-t-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left\|f|B_{p\theta}^{s}\right\|=2^{-m_\sigma(s-t-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

4. Пусть $p\ge q$ и $\theta\le\tau<\infty$.

Так как в этом случае имеет место неравенство $\|\bullet\|_q\le\|\bullet\|_p$, то используя (11), будем иметь

$$J\le\left\|\sum_{m\ge m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}2^{mt\tau}2^{m\alpha\tau}\left\|\delta_m^{\varepsilon}(f,x)\right\|_q^{\tau}\right\|^{1/\tau}\le\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}2^{mt\tau}2^{m\alpha\tau}\left\|\delta_m^{\varepsilon}(f,x)\right\|_p^{\tau}\right]^{1/\tau}\cong$$

$$\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{mt\tau}2^{-m\frac{\tau}{p}}2^{m\alpha\tau}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat f_{\psi}^{\varepsilon}(m,r)|^p\right]^{\tau/p}\right]^{1/\tau}=:J_2.$$

Применим теперь в J_2 неравенство Йенсена к внешней сумме:

$$J_2\le\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{m(t+\alpha)\theta}2^{-ms\theta}2^{m(s-\frac{1}{p})\theta}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat f_{\psi}^{\varepsilon}(m,r)|^p\right]^{\theta/p}\right]^{1/\theta}\le$$

$$2^{-m_\sigma(s-t-\alpha)}\left\|f|B_{p\theta}^{s}\right\|=2^{-m_\sigma(s-t-\alpha)}.$$

5. Пусть $p \ge q$ и $1 \le \tau < \theta$, применив к J_2 неравенство Гельдера с показателем θ/τ, получим требуемую оценку.

6. Пусть $p \ge q$ и τ = ∞.

Тогда

$$\mathrm{J}_2 \le \sup_{m\in\mathbf{N}} 2^{m(s-\frac{1}{p})}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1} 2^{m(t+\alpha)\theta}2^{-ms\theta}\right]^{1/\theta} \le 2^{-m_\sigma(s-t-\alpha)}\left\|f\,|B_{p\theta}^s\right\| = 2^{-m_\sigma(s-t-\alpha)}.$$

ii) теперь получим оценку сверху в (10).

Аналогично тому, как это было сделано выше, применяя следствие теоремы Литтлвуда–Пэли, а затем неравенство Бернштейна, имеем:

$$\left\|\mathrm{D}^\alpha(f-S_\sigma(f))\right\|_q = \left\|\sum_{m\ge m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}\mathrm{D}^\alpha\delta_m^\varepsilon(f,x)\right\|_q \le$$

$$\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}\left\|\mathrm{D}^\alpha\delta_m^\varepsilon(f,x)\right\|_q^q\right]^{1/q} \le \left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}2^{m\alpha q}\left\|\delta_m^\varepsilon(f,x)\right\|_q^q\right]^{1/q} =: \mathrm{J}_3.$$

Далее рассмотрим раздельно следующие случаи.

1) пусть $2 \le q < \infty$.

a) рассмотрим случай, когда $p < q$ и $2 < \theta < \infty$.

Применим к J_3 неравенство разных метрик (6):

$$\mathrm{J}_3 = \left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}2^{2m\alpha}\left\|\delta_m^\varepsilon(f,x)\right\|_q^2\right]^{1/2} \le \left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}2^{2m\alpha}2^{2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left\|\delta_m^\varepsilon(f,x)\right\|_p^2\right]^{1/2} \cong$$

$$\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{2m\alpha}2^{-2\frac{m}{p}}2^{2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{2/p}\right]^{1/2} =$$

$$\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{2m(\alpha-\frac{1}{q})}2^{-2m(s-\frac{1}{p})}2^{2m(s-\frac{1}{p})}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{2/p}\right]^{1/2} =: \mathrm{J}_4.$$

Теперь применим неравенство Гельдера с показателем θ/2:

$$\mathrm{J}_4 \le \left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{2m(s-\frac{1}{p})\frac{\theta}{2}}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{\theta/p}\right]^{1/\theta} \times$$

$$\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{-2m(s-\alpha+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})\frac{\theta}{\theta-2}}\right]^{\frac{\theta-2}{2\theta}} = 2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left\|f|B_{p\theta}^s\right\| \le 2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

b) рассмотрим случай, когда $p < q$ и $1 \le \theta \le 2$.

В J_4 применим неравенство Йенсена к внешней сумме:

$$\mathrm{J}_4 \le \left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{m(\alpha-\frac{1}{q})\theta}2^{-m(s-\frac{1}{p})\theta}2^{m(s-\frac{1}{p})\theta}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{\theta/p}\right]^{1/\theta} \le$$

$$2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{m(s-\frac{1}{p})\theta}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{\theta/p}\right]^{1/\theta}=2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left\|f\,|\,B^s_{p\,\theta}\right\|=2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

c) рассмотрим случай, когда $p<q$ и $\theta=\infty$.

Тогда оценим J_4:

$$J_4\le\sup_{m\in\mathbf{N}}2^{m(s-\frac{1}{p})}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{1/p}\times$$

$$\times\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{-2m(s-\alpha+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\right]^{1/2}=2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left\|f\,|\,B^s_{p\theta}\right\|\le2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

d) рассмотрим случай, когда $p\ge q$ и $2<\theta<\infty$.

Так как в этом случае имеет место неравенство $\|\bullet\|_q\le\|\bullet\|_p$, то продолжим J_3:

$$J_3\le\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1}2^{2m\alpha}\left\|\delta_m^\varepsilon(f,x)\right\|_p^2\right]^{1/2}\asymp\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{2m\alpha}2^{-2\frac{m}{p}}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{2/p}\right]^{1/2}=$$

$$\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{2m\alpha}2^{-2ms}2^{2m(s-\frac{1}{p})}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{2/p}\right]^{1/2}=:J_5.$$

Теперь применим неравенство Гельдера с показателем $\theta/2$:

$$J_5\le\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{2m(s-\frac{1}{p})\frac{\theta}{2}}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{\theta/p}\right]^{1/\theta}\times$$

$$\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{-2m(s-\alpha)\frac{\theta}{\theta-2}}\right]^{\frac{\theta-2}{2\theta}}=2^{-m_\sigma(s-\alpha)}\left\|f\,|\,B^s_{p\theta}\right\|=2^{-m_\sigma(s-\alpha)}.$$

e) рассмотрим случай, когда $p\ge q$ и $1\le\theta\le2$.

В J_5 применим неравенство Йенсена к внешней сумме:

$$J_5\le\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{-m(s-\alpha)\theta}2^{m(s-\frac{1}{p})\theta}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{\theta/p}\right]^{1/\theta}\le$$

$$\le2^{-m_\sigma(s-\alpha)}\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{m(s-\frac{1}{p})\theta}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{\theta/p}\right]^{1/\theta}=2^{-m_\sigma(s-\alpha)}\left\|f\,|\,B^s_{p\,\theta}\right\|=2^{-m_\sigma(s-\alpha)}.$$

f) рассмотрим случай, когда $p\ge q$ и $\theta=\infty$.

Тогда оценим J_5:

$$J_5\le\sup_{m\in\mathbf{N}}2^{m(s-\frac{1}{p})}\left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1}|\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{m\ge m_\sigma+1}2^{-2m(s-\alpha)}\right]^{1/2}=2^{-m_\sigma(s-\alpha)}\left\|f\,|\,B^s_{p\theta}\right\|=2^{-m_\sigma(s-\alpha)}.$$

2) пусть $1<q<2$.

a) рассмотрим случай, когда $p<q$ и $q<\theta<\infty$.

Тогда в J_3 применим неравенство Йенсена к внутренней сумме:

$$J_3 \approx \left[\sum_{m\geq m_\sigma+1} 2^{m\alpha q} 2^{-m\frac{q}{q}} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^q\right]\right]^{1/q} \leq$$

$$\left[\sum_{m\geq m_\sigma+1} 2^{m(\alpha-\frac{1}{q})q} 2^{m(s-\frac{1}{p})q} 2^{-m(s-\frac{1}{p})q} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{q/p}\right]^{1/q} =: J_6.$$

Применим неравенство Гельдера с показателем θ/q:

$$J_6 \leq \left[\sum_{m\geq m_\sigma+1} 2^{m(s-\frac{1}{p})\frac{\theta}{q}q} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{\theta/p}\right]^{1/\theta} \times$$

$$\times\left[\sum_{m\geq m_\sigma+1} 2^{-m(s-\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\frac{\theta}{\theta-q}q}\right]^{\frac{\theta-q}{q\theta}} = 2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left\|f\,|B_{p\,\theta}^s\right\| = 2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

b) рассмотрим случай, когда $p < q$ и $1 \leq \theta \leq q$.

В J_6 применим неравенство Йенсена к внешней сумме:

$$J_6 \leq \left[\sum_{m\geq m_\sigma+1} 2^{m(\alpha-\frac{1}{q})\theta} 2^{m(s-\frac{1}{p})\theta} 2^{-m(s-\frac{1}{p})\theta} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{\theta/p}\right]^{1/\theta} =$$

$$2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left\|f|B_{p\theta}^s\right\| = 2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

c) рассмотрим случай, когда $p < q$ и $\theta = \infty$.

Тогда оценим J_6:

$$J_6 \leq \sup_{m\in\mathbf{N}} 2^{m(s-\frac{1}{p})} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{1/p} \times$$

$$\times\left[\sum_{m\geq m_\sigma+1} 2^{-m(s-\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})q}\right]^{1/q} = 2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left\|f\,|B_{p\,\theta}^s\right\| = 2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

d) рассмотрим случай, когда $p \geq q$ и $q < \theta < \infty$.

Так как в этом случае имеет место неравенство $\|\bullet\|_q \leq \|\bullet\|_p$, то продолжим J_3:

$$\left[\sum_{m\geq m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1} 2^{m\alpha q}\left\|\delta_m^\varepsilon(f,x)\right\|_q^q\right]^{1/q} \leq \left[\sum_{m\geq m_\sigma+1}\sum_{\varepsilon=\pm1} 2^{m\alpha q}\left\|\delta_m^\varepsilon(f,x)\right\|_p^q\right]^{1/q} \cong$$

$$\left[\sum_{m\geq m_\sigma+1} 2^{m\alpha q} 2^{-m\frac{q}{p}} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{q/p}\right]^{1/q} =$$

$$\left[\sum_{m\geq m_\sigma+1} 2^{m\alpha q} 2^{-msq} 2^{m(s-\frac{1}{p})q} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p\right]^{q/p}\right]^{1/q} =: J_7.$$

Теперь применим неравенство Гельдера с показателем θ/q:

$$J_7 \le \left[\sum_{m \ge m_\sigma + 1} 2^{m(s-\frac{1}{p})\frac{\theta}{q}q} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1} \sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p \right]^{\theta/p} \right]^{1/\theta} \times$$

$$\times \left[\sum_{m \ge m_\sigma + 1} 2^{-m(s-\alpha)\frac{\theta}{\theta-q}q} \right]^{\frac{\theta-q}{q\theta}} = 2^{-m_\sigma(s-\alpha)} \left\| f \,|\, B_{p\theta}^s \right\| = 2^{-m_\sigma(s-\alpha)}.$$

e) рассмотрим случай, когда $p \ge q$ и $1 \le \theta \le q$.

В J_7 применим неравенство Йенсена к внешней сумме:

$$J_7 \le \left[\sum_{m \ge m_\sigma + 1} 2^{-m(s-\alpha)\theta} 2^{m(s-\frac{1}{p})\theta} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1} \sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p \right]^{\theta/p} \right]^{1/\theta} \le$$

$$2^{-m_\sigma(s-\alpha)} \left[\sum_{m \ge m_\sigma + 1} 2^{m(s-\frac{1}{p})\theta} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1} \sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p \right]^{\theta/p} \right]^{1/\theta} = 2^{-m_\sigma(s-\alpha)} \left\| f \,|\, B_{p\,\theta}^s \right\| = 2^{-m_\sigma(s-\alpha)}.$$

f) рассмотрим случай, когда $p \ge q$ и $\theta = \infty$.

Тогда оценим J_7:

$$J_7 \le \sup_{m \in \mathbf{N}} 2^{m(s-\frac{1}{p})} \left[\sum_{\varepsilon=\pm1} \sum_{r=0}^{2^{m-1}-1} |\hat{f}_\psi^\varepsilon(m,r)|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{m \ge m_\sigma + 1} 2^{-m(s-\alpha)q} \right]^{1/q} = 2^{-m_\sigma(s-\alpha)} \left\| f \,|\, B_{p\theta}^s \right\| = 2^{-m_\sigma(s-\alpha)}.$$

Таким образом, мы полностью получили оценки сверху в (9) и (10).

II. Оценки снизу.

i) получим нижнюю оценку в (9).

1. Рассмотрим случай, когда $p \le q$.

Возьмем функцию

$$f_1 = 2^{-(m_\sigma+1)(s-\frac{1}{p}+1)} \sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx}, \; l := m_\sigma + 1.$$

Известно (см., например, [8]), что

$$\left\| \sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx} \right\|_p \cong 2^{l(1-\frac{1}{p})}, \; p \in (1,\infty).$$

Оценим норму функции f_1 в пространстве $B_{p\theta}^s(\mathbf{T})$, имея в виду, что $\delta_m(f_1, x) \equiv 0$, если $m \ne m_\sigma + 1$. Пусть сначала $1 \le \theta < \infty$. Тогда

$$\left\| f_1 \,|\, B_{p\theta}^s \right\| = \left[\sum_m 2^{\theta m s} \left\| \delta_m(f_1, x) \right\|_p^\theta \right]^{1/\theta} = \left[2^{-(m_\sigma+1)(s-\frac{1}{p}+1)\theta} 2^{\theta(m_\sigma+1)s} \left\| \sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx} \right\|_p^\theta \right]^{1/\theta} \cong 1.$$

Если $\theta = \infty$, то

$$\left\| f_1 \,|\, B_{p\infty}^s \right\| = \sup_m 2^{ms} \left\| \delta_m(f_1, x) \right\|_p = 2^{-(m_\sigma+1)(s-\frac{1}{p}+1)} 2^{(m_\sigma+1)s} \left\| \sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx} \right\|_p \cong 1.$$

Тогда $\varphi_1 = \dfrac{f_1}{\left\|f_1|B^s_{p\theta}\right\|}$ и $\|\varphi_1\|_q \cong \|f_1\|_q$. Так как $S_\sigma(f_1)\equiv 0$, следовательно $I_\sigma(f_1)=0\in \mathbf{R}^{2[\sigma]+1}$ (т.е. $\hat f_1(k)=0$ для всех $k\in\mathbf{Z}$ таких, что $|k|\le\sigma$). Поэтому

$$\sup_{f\in \mathrm{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})}\left\|\mathrm{D}^\alpha f - Q(I_\sigma(f))\right\|_X \ge \left\|\mathrm{D}^\alpha f_1 - \mathrm{D}^\alpha S_\sigma(f_1)\right\|_X = \left\|\mathrm{D}^\alpha f_1\right\|_X.$$

Так как

$$\mathrm{D}^\alpha f_1 = 2^{-m_\sigma(s-\frac{1}{p}+1)}\mathrm{D}^\alpha\left[\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx}\right],$$

то

$$\left\|\mathrm{D}^\alpha f_1|B^t_{q\tau}\right\| = \left[2^{m_\sigma t\tau}2^{-m_\sigma(s-\frac{1}{p}+1)\tau}\left\|\mathrm{D}^\alpha\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx}\right\|_q^\tau\right]^{1/\tau}. \tag{12}$$

Оценим норму $\left\|\mathrm{D}^\alpha\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx}\right\|_q$. Применим для оценки снизу данной нормы теорему Марцинкевича о мультипликаторах (см.[3]). Запишем выражение:

$$\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx} = \sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1}\frac{1}{2^{l\alpha}}\left(\frac{2^l}{k}\right)^\alpha k^\alpha e^{ikx} = 2^{-l\alpha}\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1}\left(\frac{2^l}{k}\right)^\alpha k^\alpha e^{ikx}.$$

Тогда по теореме Марцинкевича имеем:

$$\left\|\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx}\right\|_q = 2^{-l\alpha}\left\|\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1}\left(\frac{2^l}{k}\right)^\alpha k^\alpha e^{ikx}\right\|_q \le C2^{-l\alpha}\left\|\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} k^\alpha e^{ikx}\right\|_q.$$

Но,

$$\left\|\mathrm{D}^\alpha\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx}\right\|_q = \left\|\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} k^\alpha e^{ikx}\right\|_q,$$

следовательно,

$$\left\|\mathrm{D}^\alpha\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx}\right\|_q \ge C2^{l\alpha}\left\|\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx}\right\|_q,\quad l=m_\sigma+a.$$

Теперь продолжим (12):

$$\left[2^{m_\sigma t\tau}2^{-m_\sigma(s-\frac{1}{p}+1)\tau}\left\|D^\alpha\sum_{|k|=2^{l-1}}^{2^l-1} e^{ikx}\right\|_q^\tau\right]^{1/\tau} \ge 2^{m_\sigma t}2^{-m_\sigma(s-\frac{1}{p}+1)}2^{m_\sigma\alpha}\left\|\sum_{|k|=2^{m_\sigma}}^{2^{m_\sigma+1}-1} e^{ikx}\right\|_q \approx 2^{-m_\sigma(s-t-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

2. Рассмотрим случай, когда $p<q$.

Возьмем функцию

$$f_2 = 2^{-(m_\sigma+1)s}e^{ikx},\ k:=2^{m_\sigma+1}.$$

Оценим норму функции f_2 в пространстве $B^s_{p\theta}(\mathbf{T})$, имея в виду, что $\delta_m(f_2,x)$, если $m\ne m_\sigma+1$. Пусть сначала $1\le\theta<\infty$. Тогда

$$\left\|f_2|B^s_{p\theta}\right\| = \left[\sum_m 2^{\theta ms}\left\|\delta_m(f_2,x)\right\|_p^\theta\right]^{1/\theta} = \left[2^{-(m_\sigma+1)s\theta}2^{(m_\sigma+1)s\theta}\left\|e^{ikx}\right\|_p^\theta\right]^{1/\theta} = 1.$$

Если $\theta = \infty$, то

$$\left\|f_2\,|\,B^s_{p\infty}\right\| = \sup_m 2^{ms}\left\|\delta_m(f_2,x)\right\|_p = 2^{-(m_\sigma+1)s}2^{(m_\sigma+1)s}\left\|e^{ikx}\right\|_p = 1.$$

Легко видеть, что $S_\sigma(f_2) \equiv 0$, следовательно, $I_\sigma(f_2) = 0$.

Так как

$$\mathsf{D}^\alpha f_2 = 2^{-m_\sigma s}\mathsf{D}^\alpha e^{ikx},$$

то

$$\left\|\mathsf{D}^\alpha f_2|B^t_{q\tau}\right\| = [2^{m_\sigma t\tau}2^{-m_\sigma s\tau}\left\|\mathsf{D}^\alpha e^{ikx}\right\|_q^\tau]^{1/\tau} \cong 2^{-m_\sigma(s-t-\alpha)}.$$

Таким образом, оценка снизу в соотношении (9) получена.

ii) получим оценку снизу в (10).

1.Рассмотрим случай, когда $p \le q$.

Возьмем функцию f_1. Выше было показано, что $f_1 \in \mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ и $S_\sigma(f_1) \equiv 0$, следовательно $I_\sigma(f_1) = 0$. Тогда

$$\sup_{f\in \mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})}\left\|\mathsf{D}^\alpha f - Q(I_\sigma(f))\right\|_X \ge \left\|\mathsf{D}^\alpha f_1 - \mathsf{D}^\alpha S_\sigma(f_1)\right\|_X = \left\|\mathsf{D}^\alpha f_1\right\|_X \ge$$

$$\ge 2^{-m_\sigma(s-\frac{1}{p}+1)}2^{m_\sigma\alpha}\left\|\sum_{|k|=2^{m_\sigma}}^{2^{m_\sigma+1}-1} e^{ikx}\right\|_q \cong 2^{-m_\sigma(s-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}.$$

2. Рассмотрим случай, когда $p > q$.

Если возьмем функцию f_2, то аналогично случаю 2 п. i) получим требуемую оценку снизу.

Из конструкции пробных функций легко вытекает оптимальность по порядку построенного метода восстановления $Q(I_\sigma(f))$ среди всех линейных методов восстановления, использующих информацию I_σ о спектре.

Действительно, для любого линейного метода восстановления $Q(I_\sigma(f))$ имеем, что $Q(I_\sigma(f_j)) = Q(0) \equiv 0 \in X$, где $j = 1,2$, X – либо пространство $B^t_{q,\tau}$ либо L_q.

Тогда справедлива оценка снизу

$$\inf_Q \sup_{f\in \mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})}\left\|\mathsf{D}^\alpha f - Q(I_\sigma(f))\right\|_X \ge \inf_Q\left\|\mathsf{D}^\alpha f_j - Q(I_\sigma(f_j))\right\|_X = \inf_Q\left\|\mathsf{D}^\alpha f_j\right\|_X = \left\|\mathsf{D}^\alpha f_j\right\|_X.$$

Отсюда и из рассмотренных выше оценок для пробных функций получаем требуемые оценки снизу для соответствующих величин линейного оптимального восстановления оператора D^α на классе $\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ в пространствах $L_q(\mathbf{T})$ или $B^t_{q\tau}(\mathbf{T})$ по оператору информации I_σ.

Таким образом, теорема доказана полностью.

3.2 Некоторые обобщения. Используя классические результаты теории вложений и теоремы, полученные выше, далее рассмотрим задачи приближения и восстановления оператора в более общем случае. А именно, справедлива

Теорема 2. Пусть $1 < p,q < \infty, 1 \le \theta,\tau < \infty$, если $s - t - \alpha > (\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+$, то справедлива оценка:

$$\mathsf{E}(\mathsf{A}^s_{p\theta},\mathsf{D}^\alpha,I_\sigma,A^t_{q\tau}) \cong \sup_{f\in \mathsf{A}^s_{p\theta}(\mathbf{T})}\left\|\mathsf{D}^\alpha f - Q(I_\sigma(f))\,|\,A^t_{q\tau}\right\| \cong 2^{-m_\sigma(s-t-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+)}, \tag{13}$$

Здесь A – это либо B, либо F, аналогично A – это либо B, либо F.

Доказательство. Случай, когда A – это B, A – это B, разобран в теореме 1. Далее рассмотрим случай A – это F, A – это F. Оставшиеся случаи пар $(\mathsf{B},F);(\mathsf{F},B)$ разбираются аналогично.

Для доказательства воспользуемся оценкой (10) и известными вложениями

$$B^t_{q\min(q,\tau)}(\mathbf{T}) \subset F^t_{q\tau}(\mathbf{T}) \subset B^t_{q\max(q,\tau)}(\mathbf{T}). \tag{14}$$

Тогда имеют место неравенства:

$$\sup_{f\in \mathsf{B}^s_{p\min(p,\theta)}(\mathbf{T})} \left\| \mathsf{D}^\alpha f - Q(I_\sigma(f)) | B^t_{q\max(q,\tau)} \right\| = \sup_{f\in \mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T})} \left\| \mathsf{D}^\alpha f - Q(I_\sigma(f)) | F^t_{q\tau} \right\| =$$

$$\sup_{f\in \mathsf{B}^s_{p\max(p,\theta)}(\mathbf{T})} \left\| \mathsf{D}^\alpha f - Q(I_\sigma(f)) | B^t_{q\min(q,\tau)} \right\|.$$

Величины справа и слева здесь согласно теореме 1 совпадают по порядку с величиной справа в (13), следовательно,

$$\sup_{f\in \mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T})} \left\| \mathsf{D}^\alpha f - Q(I_\sigma(f)) | F^t_{q\tau} \right\| \cong 2^{-m_\sigma(s-t-\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+)}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что оценка (10) из теоремы 1 является частным случаем оценки из теоремы, так как пространство $L_p(\mathbf{T})$ при $1<p<\infty$ совпадает с пространством $F^0_{p2}(\mathbf{T})$ с точностью до эквивалентности норм ([4, Ch. 3]).

ЛИТЕРАТУРА

1 Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, вып. 6 (312). – С. 89-124.

2 Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, № 3. – С. 79-100.

3 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

4 Triebel H., Schmeisser H.-J. Topics in Fourier analysis and function spaces. – Wiley, 1987. – 300 p.

5 Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИ АН СССР. – 1951. – Т. 38. – С. 244-278.

6 Zygmund A. *Trigonometric series,* – Cambridge University Press, 2002. – 747 p.

7 Лизоркин П.И. О базисах и мультипликаторах в пространствах $B^r_{p,\theta}(\Pi)$ // Труды МИ АН СССР. – 1977. – Т. 143. – С. 88-104.

8 Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. – Киев, 1987. – 268 с.

REFERENCES

1. Arestov V.V. *Uspekhi mat. Nauk*, **1996**, 51, 6 (312), 89–124 (in Russ.).
2. Dzjadyk V.K. *Vvedenie v teoriju ravnomernogo priblizhenija funkcij polinomami*. M.: Nauka, **1977**, 512 p. (in Russ.).
3. Nikol'skij S.M. *Priblizhenie funkcij mnogikh peremennykh i teoremy vlozhenija*. M.: Nauka, **1977**. 456 p. (in Russ.).
4. Triebel H., Schmeisser H.-J. *Topics in Fourier analysis and function spaces*. Wiley. Chichester and New York, **1987**. 300 p.
5. Nikol'skij S.M. *Trudy MI AN SSSR*, **1951**, 38, 244–278 (in Russ.).
6. Zygmund A. *Trigonometric series,* Cambridge University Press, **2002,** 747 p.
7. Lizorkin P.I. *Trudy MI AN SSSR,* **1977,** *143*, 88–104 (in Russ.).
8. Stepanec A.I. *Klassifikacija i priblizhenie periodicheskikh funkcij*. Kiev: Naukova dumka, **1987**. 268 p. (in Russ.).

Ш. А. Балғымбаева, Ж. М. Нұрмұхамедова

ТЕГІС ПЕРИОДТЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КЛАСТАРЫНДА ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЫН ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУ

Периодты функциялардың $\mathsf{B}^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ Никольский– Бесов және $\mathsf{F}^s_{p\theta}(\mathbf{T})$ Лизоркин–Трибель кластарында $d^\alpha/dx^\alpha, \alpha\in \mathsf{N}$, операторын келесі кеңістіктердің: $L_q(\mathbf{T})$ (α < s шарты орындалғанда), $B^t_{q\tau}(\mathbf{T})$ немесе

$F^{s}_{p\theta}(\mathbf{T})$ ($s-t-\alpha>(1/p-1/q)_{+}$ шарты орындалса), бірінің метрикасында сызықты оңтайлы қалпына келтіру есебі қарастырылған. Осы кластардың функциялары туралы ақпарат ретінде нөмерлері $[-\sigma,\sigma]$ кесіндісіне тиесілі Фурье коэффициенттер жиынтығы пайдаланылған.

Sh. A. Balgimbayeva, Zh. M. Nurmukhamedova

RECOVERY OPERATOR OF DIFFERENTIATION
ON CLASSES OF SMOOTH PERIODIC FUNCTIONS

The problem of linear optimal recovery of operator $d^{\alpha}/dx^{\alpha}, \alpha \in \mathrm{N}$, on the classes $\mathrm{B}^{s}_{p\theta}(\mathbf{T})$ of Nikol'skii–Besov and $\mathrm{F}^{s}_{p\theta}(\mathbf{T})$ of Lizorkin–Triebel of periodic functions in the norm of one of the following spaces: $L_q(\mathbf{T})$ for $\alpha < s$, $B^{t}_{q\tau}(\mathbf{T})$ and $F^{s}_{p\theta}(\mathbf{T})$ for $s-t-\alpha>(1/p-1/q)_{+}$, is considered. Collection of Fourier coefficients withnumbers in $[-\sigma,\sigma]$ is used as information on functions from those classes.