

К. Б. БАЛАЕВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Институт математики МОН РК

Во многих научных дисциплинах и их приложениях в последнее время все в большей степени можно заметить стремление замены описания системы, в данный момент времени – на исследование ее развития во времени. Эволюция системы во времени представляется обычно в виде траектории в соответствующем фазовом пространстве. Как правило, траектории являются непрерывными, часто, однако, их наблюдение является возможным только через определенные промежутки времени, которое является основой дискретности информации.

Другой причиной дискретности эволюции системы является необходимость использования цифровой вычислительной техники, которая требует построения алгоритмов, разрешающих соответствующие зависимости. Изучение таких моделей связано не только с методами численного определения состояний, но также и с познанием качественных аспектов их развития.

Когда дискретности в системе порождаются по второй причине, полученной рекуррентными соотношениями, мы называли «разностно-динамическими системами» (или сокращенно РДС).

Моделями эволюции рассматриваемых РДС являются последовательности, которые подчиняются зависимостям, называемым рекуррентными уравнениями.

Поэтому, рассматривая модель РДС, удобно говорить просто о свойствах соответствующего рекуррентного уравнения.

По этой причине все задачи представляются:

- 1) как проблема, относящаяся к свойствам решения рекуррентных уравнений;
- 2) как проблема, относящаяся к свойствам преобразований в евклидовых или других пространствах.

Каждый факт, сформулированный по первому способу, может быть сформулирован и по второму способу, и наоборот.

В теории РДС используются оба способа, однако в случае линейных РДС речь будет идти главным образом о свойствах рекуррентных уравнений, а в случае нелинейных РДС речь будет идти главным образом о свойствах преобразований. Поэтому при исследовании решения нелинейных РДС обычно стараются придумать аналогичные методы исследования соответствующей задачи системы дифференциальных и алгебраических уравнений [1, 4-9].

В данной работе для исследования качественного свойства решения РДС вводятся различные типы понятий устойчивости, использованные для системы дифференциальных уравнений [1, 4-8] и с помощью аналогии второго метода Ляпунова [2, 3] устанавливаются условия, при которых решения РДС будут асимптотически устойчивы в целом, экспоненциально устойчивым, устойчиво по Лагранжу, РДС является конвергентной, диссипативной и орбитально устойчивой.

Асимптотическая устойчивость в целом

Рассмотрим РДС

$$x_{n+1} = X(n, x_n) \quad (X(n, 0)) = 0, \quad (1)$$

где

$$X(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k),$$

где Z^+ – множество неотрицательных целых чисел, R^k – k -мерные евклидовы пространства.

Определение 1. Говорят, что нулевое решение $x_n = 0$ РДС (1) асимптотически устойчиво в целом, если:

- 1) оно асимптотически устойчиво по Ляпунову и
- 2) для каждого решения $x_n = X(n; n_0, x_{n_0}) \quad (\forall n_0 \in Z^+)$ выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad (2)$$

(т.е. область притяжения представляет собой все пространство R^k).

Определение 2. Будем говорить, что

$$V(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k)$$

допускает бесконечно большой низший предел при $x_n \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{\|x_n\| \rightarrow \infty} V(n, x_n) = \infty \quad (3)$$

т.е. для любого $M > 0$ существует $R = R(M)$ такое, что

$$|V(n, x_n)| > M \text{ при } n \in Z^+ \text{ и } \|x_n\| \geq R$$

Определение 3. Будем говорить, что

$$V(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k)$$

допускает в R^k сильный бесконечно малый высший предел при $x_n \rightarrow 0$, если существует функция $U(x_n) \in C(R^k)$

такая, что

$$|V(n, x_n)| \leq U(x_n) \quad (4)$$

при

$$(n, x_n) \in Z^+ \times R^k \text{ и } U(0) = 0.$$

Теорема 1. Если для РДС (1) существует положительно определенная функция

$$V(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k),$$

допускающая в R^k сильный бесконечно малый высший предел при $x_n \rightarrow 0$ и допускает бесконечно большой низший предел при $x_n \rightarrow \infty$, причем первые разности $\Delta V(n, x_n)$, взятые в силу РДС (1) отрицательно определено в R^k , то тривиальное решение $x_n = 0$ (1) асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Так как условия этой теоремы, очевидно, включают условия первой теоремы Ляпунова [2], т.е. нулевое решение $x_n = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Пусть $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$ – решение РДС (1), определяемое начальными условиями

$$x(n; n_0, x_{n_0}) = x_{n_0} \neq 0$$

при

$$\forall n_0 \in Z^+ \text{ и } \forall x_{n_0} \in R^k.$$

Обозначим через D_{x_n} – некоторую компактсодержащую точку x_n

$$x_{n_0} \in D_{x_n} \subset R^k$$

и пусть $M = \sup V(n, x_n)$ на $Z^+ \times D_{x_n}$.

В силу неравенства (4) имеем $M < +\infty$.

Так как функция $V(n, x_n)$ обладает в R^k бесконечно большим пределом при $x_n \rightarrow \infty$, то существует шар

$$S \{ \|x_n\| < R \} \supset D_{x_n}$$

такой, что

$$V(n, x_n) > M$$

при

$$\|x_n\| \geq R. \quad (5)$$

По условию теоремы вдоль траектории $x(n; n_0, x_{n_0})$ выполнено неравенство $\Delta V_n < 0$, поэтому при $n \geq n_0$ имеем

$$V(n; x(n; n_0, x_{n_0})) \leq V(n_0, x_{n_0}) \leq M$$

и следовательно

$$\|x(n; n_0, x_{n_0})\| < R,$$

т.е. все решения РДС (1) ограничены.

Покажем теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n; x(n; n_0, x_{n_0})) = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\delta > 0$ таково, что функция $U(x_n)$, определяемая формулой (4), удовлетворяет неравенству

$$0 \leq U(x_n) < \varepsilon$$

при

$$\|x_n\| < \delta. \quad (6)$$

Покажем, что решение $x(n; n_0, x_{n_0})$ при $n \rightarrow \infty$ обязательно войдет внутри замкнутого шара $\|x_n\| \leq \delta$.

Действительно, предположим обратно, т.е.

$$0 < \delta < \|x_n\| < R$$

при

$$n \geq n_0.$$

Тогда ΔV_n будет отрицательно определенной, имеет в области

$$Z^+ \times \{\delta \leq \|x_n\| < R\}$$

отрицательную верхнюю грань $-m$ ($m > 0$) и, значит, при $n \geq n_0$ справедливо неравенство

$$\Delta V_n \leq -m.$$

Суммируя это неравенство в пределах от n_0 до n , получим

$$V(n, x_n) \leq V(n_0, x_{n_0}) - m(n - n_0) < 0.$$

Если только

$$n > \left[n_0 + \frac{V(n, x_{n_0})}{m} \right],$$

(где $[]$ – целые части), что противоречит положительности функции $V(n, x_n)$. Следовательно, существует момент $n_1 > n_0$ такой, что

$$\|x(n; n_0, x_{n_0})\| \leq \delta$$

т.е.

$$U(x(n; n_0, x_{n_0})) < \varepsilon$$

отсюда ввиду монотонности убывания функции

$$V(n; x(n; n_0, x_{n_0}))$$

при $n > n_1$, будем иметь

$$V(n, x_n) < V(n_1, x_{n_1}) \leq U(x_{n_1}) < \varepsilon$$

и таким образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n; x_{n_0}) = 0. \quad (7)$$

Из последнего равенства выводим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n; n_0, x_{n_0}) = 0.$$

Так как в противном случае существовала бы последовательность

$$x(n_l; n_0, x_{n_0}) \quad (l = 1, 2, \dots; \quad n_l \rightarrow \infty)$$

такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n_l; x_{n_l}) \neq 0.$$

Это противоречило бы равенству (7).

Теорема доказана.

Экспоненциальная устойчивость

Определение 4. Нулевое решение РДС (1) называется экспоненциально устойчивым при $n \rightarrow \infty$, если для каждого решения $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$ в некоторой области

$$D_{x_n} = Z^+ \times \{x_n \in R^k / \|x_n\| < h < H\}$$

(где h и H – некоторые постоянные) справедливо неравенство

$$\|x_n\| \leq L \cdot \|x_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)}, \quad n \geq n_0, \quad (8)$$

где L и α – положительные постоянные, не зависящие от выбора решения x_n . Из определения видно, что из экспоненциальной устойчивости нулевого решения $x_n = 0$ следует его асимптотическая устойчивость. Действительно, полагая

$$\|x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{L} = \delta,$$

где $0 < \varepsilon$ – сколь угодно малое произвольное постоянное.

Из неравенства (8) имеем

$$\|x_n\| < \varepsilon \text{ при } n \geq n_0,$$

т.е. решение $x_n = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Кроме того, очевидно

$$\lim_{n \leftarrow \infty} x_n = 0,$$

если только $\|x_{n_0}\| < h$.

Если неравенство (8) справедливо для всех точек $x_{n_0} \in R^k$, то имеет место асимптотическая устойчивость в целом.

Теорема 2. Если нулевое решение однородной линейной РДС

$$x_{n+1} = Ax_n \quad (9)$$

с постоянной матрицей A асимптотически устойчиво при $n \rightarrow \infty$, то эта РДС экспоненциально устойчива, т.е. каждое ее решение экспоненциально устойчиво при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Как известно [2], нулевое решение РДС (9) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы A по модулю меньше единицы, т.е.

$$|\lambda_\rho(A)| < 1 \quad (\rho = 1, 2, \dots, k).$$

Положим

$$\max_\rho |\lambda_\rho(A)| < e^{-\alpha} < 1,$$

где $\alpha > 0$.

Тогда при $n \in Z^+$ получим

$$|A^n| \leq Le^{-\alpha n}, \quad (10)$$

где L – некоторая положительная постоянная. Из РДС (9) для любого решения x_n находим

$$x_n = A^{n-n_0} x_{n_0},$$

где начальный момент n_0 произволен. Следовательно, на основании (10) при $n_0 < n$ получаем

$$\|x_n\| \leq L \cdot \|x_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)}.$$

Отсюда для любого решения y_n РДС (9) учитывая, что разность $x_n - y_n$ есть решение этой РДС при $n_0 \leq n$ будем иметь

$$\|x_n - y_n\| \|x_n\| \leq L \cdot \|x_{n_0} - y_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)}.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Для нестационарной линейной РДС из асимптотической устойчивости ее нулевого решения вообще говоря не следует экспоненциальная устойчивость [3].

Теорема 3. Если существует положительно-определенная квадратичная форма

$$V(x_n) = x_n^T A x_n \quad (11)$$

(' – знак транспонированная) первой разности, которой ΔV_n в силу

$$\Delta V_n \leq W(x_n), \quad (12)$$

$$(n_0 < n; \|x_n\| \leq h < H),$$

где

$$W(x_n) = x_n^T B x_n \quad (13)$$

отрицательно определенная квадратичная форма (A и B – постоянные симметрические матрицы), то нулевое решение РДС (1) экспоненциально устойчиво при $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство. На основании формул (11) и (13) получаем:

$$a_1(x_n; x_n) \leq V_n \leq a_2(x_n; x_n)$$

и

$$b_1(x_n; x_n) \leq -W \leq b_2(x_n; x_n),$$

где

$$a_1 = \min_{\rho} \lambda_{\rho}(A), \quad a_2 = \max_{\rho} \lambda_{\rho}(A)$$

и соответственно

$$b_1 = \min_{\rho} \lambda_{\rho}(B), \quad b_2 = \max_{\rho} \lambda_{\rho}(B).$$

Причем $0 < a_1 \leq a_2$ и $0 < b_1 \leq b_2$.

Отсюда на основании неравенства (12) выводим

$$\Delta V_n \leq -b_1(x_n; x_n) \leq -\frac{b_1}{a_2} V(x_n).$$

Суммируя это неравенство, будем иметь при $n_0 < n$

$$V(x_n) \leq V(x_{n_0}) e^{-2\alpha(n-n_0)},$$

где $n_0 \leq n$ – находим

$$\|x_n\|^2 \leq \frac{1}{a_1} V(x_n) \leq \frac{a_2}{a_1} \|x_{n_0}\|^2 e^{-2\alpha(n-n_0)},$$

т.е. при $n_0 < n$

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{a_1} \|x_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)},$$

где

$$S = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \text{ и } \|x_{n_0}\| \text{ – достаточно мала.}$$

Устойчивость по Лагранжу

Определение 5. РДС (1) называется устойчивой по Лагранжу, если:

1) каждое решение $x(n; n_0, x_{n_0})$, где $n_0 \in Z^+$ существует для всех $n \in Z^+$;

2) $\|x_n\|$ – ограничена на Z^+ .

Используя функции Ляпунова, нетрудно сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости РДС (1) по Лагранжу.

Теорема 4. Для того, чтобы РДС (1) была устойчива по Лагранжу, необходимо и достаточно, чтобы в $Z^+ \times R^k$ существовала функция $V(n, x_n)$ такая, что

$$1) V(n, x_n) \geq W(x_n), \text{ где } \lim_{x_n \rightarrow \infty} W(x_n) = \infty;$$

2) для каждого решения x_n функция была невозрастающей относительно $n \in Z^+$.

Доказательство.

Достаточность: Пусть для РДС (1) существует функция $V(n, x_n)$, обладающая свойствами 1) и 2).

Для всякого решения

$$x(n; n_0, x_{n_0}) \quad (n_0 \in Z^+; \|x_{n_0}\| < \infty)$$

в силу условия 2) при $n \geq n_0$ имеем

$$V(n, x_n) \leq V(n_0, x_{n_0}).$$

Отсюда на основании 1) получаем

$$W(x(n; n_0, x_{n_0})) \leq V(n; x(n; n_0, x_{n_0})) \leq V(n_0, x_{n_0}) \quad (14)$$

при $n \geq n_0$.

Из последнего неравенства следует, что решение $x(n; n_0, x_{n_0})$ ограничено.

Действительно, если это не так, то нашлась бы последовательность моментов $n_l \rightarrow \infty$ ($l = 1, 2, \dots; n_l > n_0$) такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l}\| = \infty$$

и следовательно

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W(x_{n_l}) = \infty.$$

Это противоречило бы неравенству (14), что невозможно.

Необходимость: Пусть любое решение $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$ РДС (1) существует и ограничено в Z^+ .

Положим

$$V(n, x_n) = \sup_{\nu > 0} \|x_{n+\nu}\|^2 = \sup_{\nu > 0} \|x(n+\nu; n, x_n)\|^2, \quad (15)$$

где

$$\|x_n\| < \infty, n > n_0 \in Z^+$$

из формулы (15) имеем

$$V_n \geq \|x(n+\nu; n, x_n)\|^2 = \|x_n\|^2 = W(x_n).$$

Причем, очевидно

$$\lim_{\|x_n\| \rightarrow \infty} W(x_n) = \infty.$$

Т.е. условие 1) выполнено.

Далее, при $n_0 < n_1 < n_2$, учитывая, что в силу свойства единственности решения $x_n = x(n; n_2, x_{n_2})$ является продолжением решения $x_n = x(n; n_1, x_{n_1})$, получаем

$$\begin{aligned} V(n; x_{n_1}) &= \sup_{\nu > 0} \|x(n_1 + \nu; n_1; x(n_1; n_0; x_{n_0}))\|^2 \geq \\ &\geq \sup_{\nu \geq 0} \|x(n_2 + \nu; n_2; x(n_2; n_0; x_{n_0}))\|^2 = V(n_2; x(n_2; n_0; x_{n_0})). \end{aligned}$$

Таким образом, условие 2) так же выполнено. Т.е. теорема полностью доказана.

РДС с конвергенцией

Определение 5. Будем говорить, что РДС (1) обладает свойством конвергенции, если:

1) все решения $x(n; n_0, x_{n_0})$ определены при

$$\forall n \in Z_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \dots, \infty\};$$

2) существует единственное решение r_n , определенное и ограниченное на Z , т.е.

$$\sup_{n \in Z} \|r_n\| < \infty;$$

3) решение r_n асимптотически устойчиво в целом при $n \rightarrow \infty$, т. е. для любого $x(n; n_0, x_{n_0})$

имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n; n_0, x_{n_0}) - r_n| = 0.$$

Можно сказать, что в некотором смысле r_n является предельным режимом [7] РДС (1).

Очевидно, если РДС (1) обладает свойством конвергенции, то все ее решения $x(n; n_0, x_{n_0})$ предельно ограничены при $n \rightarrow \infty$, т.е. существует положительное число R такое, что $\|x(n; n_0, x_{n_0})\| < R$ при $n > n_0$.

В частности, например, можно принять:

$$R = \sup_{n \in Z} \|r_n\| + 1$$

Замечание. Если правая часть $X(n; x_n)$ конвергентной РДС (1) \overline{N} – периодична по n (где $\overline{N} \in N$ – множество натуральных чисел), то ограниченное решение r_n также \overline{N} – периодична по n .

Действительно, пусть

$$X(n + \overline{N}; x_n) = X(n; x_n).$$

Рассмотрим вектор-функцию $r(n + \overline{N})$ имеем $r(n + \overline{N} + 1) = X(n + \overline{N}; x_{n+\overline{N}})$. Таким образом, $r(n + \overline{N})$ также является решением РДС (1) и притом ограниченным на Z . А так как РДС с конвергенцией обладает единственным ограниченным на Z решением то

$$r(n + \overline{N}) = r(n).$$

Т.е. $r(n)$ есть \overline{N} периодическое решение РДС (1).

Теорема 5. Пусть:

$$x_{n+1} = Ax_n + f(n), \quad (16)$$

где A – постоянная $k \times k$ матрица и $(k \times 1)$ столбца $f(n) \in C(Z)$.

Если:

1) все собственные числа $\lambda_j(A)$ – матрицы A по модулю меньше единицы т.е.

$$|\lambda_j(A)| < 1; \quad j = 1, \bar{k}; \quad (17)$$

2) $\sup_{n \in Z} \|f(n)\| = \beta < \infty$,

то РДС (16) обладает свойством конвергенции, причем

$$r(n) = \sum_{j=-\infty}^n A^{n-j} f(j-1) \quad (18)$$

представляет собой единственное ограниченное на Z , решение РДС (16).

Доказательство. Из условия (17) имеет

$$\|A^n\| \leq \gamma \cdot e^{-\alpha n}$$

при $n \geq 0$, где

$$\gamma > 0 \text{ и } 0 < \alpha < -\max_j |\lambda_j|.$$

Отсюда

$$\|r_n\| \leq \gamma \sum_{j=-\infty}^n e^{-\alpha(n-j)} \|f(j-1)\| \leq \beta \gamma e^{-\alpha n} \cdot \frac{e^{\alpha n}}{\alpha} = \frac{\beta \gamma}{\alpha} < \infty.$$

Следовательно, сумма (18) сходится и функция $r(n)$ ограничена, причем

$$\sup_{n \in Z} \|r(n)\| \leq \frac{\lambda}{\alpha} \sup_{n \in Z} \|f(n)\|,$$

варьируя функцию (18) по n , получим

$$r(n+1) = f(n) + A \sum_{j=-\infty}^n A^{n-j} f(j-1) = f(n) + Ar(n)$$

и таким образом, $r(n)$ является решением РДС (16).

То, что ограниченное решение РДС (16) – единственное, следует из того обстоятельства, что разность двух ограниченных решений неоднородной РДС (16) является ограниченным решением соответствующей однородной РДС

$$x_{n+1} = Ax_n,$$

не имеющей нетривиальных решений, ограниченных на Z .

Действительно, если $r(n)$ – другое решение РДС (16), ограниченное на Z , то при любом $n_0 \in Z$ имеем

$$r_1(n) - r(n) = A^{n-n_0} [r_1(n_0) - r(n_0)]$$

отсюда

$$\|r_1(n) - r(n)\| \leq \gamma e^{-\alpha(n-n_0)} \|r_1(n_0) - r(n_0)\| \quad (19)$$

Так как

$$\sup_{n_0 \in Z} \|r_1(n_0) - r(n_0)\| < \infty,$$

то фиксируя n и переходя к пределу при $n_0 \rightarrow \infty$ в (19), получим

$$\|r_1(n) - r(n)\| \leq 0,$$

т.е. $r_1(n) = r(n)$ и таким образом, других, кроме $r(n)$ ограниченных на Z , решение РДС (16) не имеет.

Если x_n – любое решение неоднородной РДС (16), то учитывая, что разность $x_n - r(n)$ удовлетворяет однородной РДС получим

$$x_n - r(n) = A^{n-n_0} [x_{n_0} - r(n_0)].$$

Отсюда

$$\|x(n) - r(n)\| \leq \gamma e^{-\alpha(n-n_0)} \|x_{n_0} - r(n_0)\|,$$

при $n \geq n_0$ и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n) - r(n)\| = 0.$$

Таким образом, $r(n)$ устойчиво в целом при $n \rightarrow \infty$ и значит РДС (16) конвергентна.

ЛИТЕРАТУРА

1 Барбашин Е.А., Красовский М.Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом // ППМ, 18. – 1954. – Вып. 3. – С. 345-350.

2 Бапаев К.Б., Бапаева С.К. Об устойчивости линейных РДС //Матеріали ІІ Міжнародної науково-практичної конференції «Дні науки». 2006р. – 17-28 квітня 2006 року. – Дніпропетровск.

3 Бромберг П.В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. – М.: Наука, 1967.

-
- 4 Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959.
5 Лефшец С., Ла-Салль И.С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964.
6 Немышкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1949.
7 Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. – М.: Наука, 1964.
8 Zevinsan N. The asymptotic nature at solutions at linear systems at differential equations // Puke Wath Journ. – 1948. – V. 15. – P. 111-126.
9 ZiangZhang-chao. The bondedness at solutions at certain nonlinear differential equations // Chinese Wath – 3,2. – 1963. – P. 169-183.

K. B. Бопаев

АЙЫРЫМДЫҚ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕР ШЕШУЛЕРІНІҢ
ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ЖАЙЫНДАҒЫ КЕЙБІР МӘСЕЛЕЛЕР. 1

Айырымдық-динамикалық жүйелердің шешулерін сапалы зерттеу үшін дифференциалдық тендеулер жүйелеріне пайдаланылған орнықтылықтың әртүрлі типтері енгізіледі және Ляпуновтың екінші әдісі баламасы бойынша айырымдық-динамикалық жүйелер шешулерінің тұтас аспи totikaлық, экспонен-циалды, Лагранж бойынша орнықтылыктарының, айырымдық-динамикалық жүйелердің конвергенттілік диссиpативтілік және орбиталды орнықтылыктарының шарттары алынады.

K. B. Вараяев

SOME PROBLEMS OF STABILITY
OF THE DIFFERENCE-DYNAMICAL SYSTEMS. 1

In work, to study the qualitative properties of solutions – difference-dynamical system we introduce different types stability concepts used for the system of differential equations. Using the analogy of the second Lyapunov's method, establishes the conditions under which the solution of the difference-dynamical system are asymptotically stable in general, exponentially stable, stable in the Logranzh, difference-dynamical systems are convergent, the dissipation and arbitral stability.