

A. E. БЕКАЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МНОГОСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

Международный Казахско-Турецкий университет им. А. Ясави, Казахстан

Рассматривается цилиндр конечной длины, находящийся в осесимметричном напряженном состоянии. Получено аналитическое решение задачи напряженности цилиндра, которое можно использовать при решении задачи напряженно-деформированного состояния многослойных цилиндрических тел.

Использование многослойных конструкций из композиционных материалов открывает важный резерв прочности и оптимизации конструкций. При этом возникают новые задачи, обусловленные неоднородностью структуры конструкций. Поведение таких конструкций зависит от параметров (геометрических, физико-механических и др.) слоев, образующих их. Конструкции, имеющие форму слоистого цилиндра, находят широкое применение в авиационной, нефтяной и газовой промышленности [1-10] и др. Использование соотношений пространственной теории упругости к изучению таких конструкций позволяет получить более реальную картину напряженно-деформированного состояния. Ниже рассматривается цилиндр, находящийся в осесимметричном напряженном состоянии, который можно рассмотреть как один из слоев цилиндрической конструкции.

Рассматривается полый цилиндр конечной длины ℓ с внутренним $r = a$, внешним $r = b$ радиусами. Материал цилиндра изотропный и упругий.

На внутренней и внешней поверхностях заданы

$$\sigma_r = q(z), \quad \sigma_{rz} = t(z) \quad \text{при } r = a, \quad (1)$$

$$u = u(z), \quad w = w(z) \quad \text{при } r = b.$$

На торцах цилиндра рассматриваются следующие граничные условия

$$U = w = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad z = \ell. \quad (2)$$

Уравнение равновесия [11] сводится к уравнению относительно u_1

$$\Delta\Delta u_1 + 2\Delta \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial \eta^4} = 0, \quad (3)$$

где

$$\Delta(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2}. \quad (4)$$

При этом функция u_3 определяется двумя квадратурами

$$u_3 = - \int \int \left[2(1-\nu) \Delta u_1 + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \right] d\xi d\eta + f_1^*(\eta) + f_2^*(\xi), \quad (5)$$

где $f_1^*(\eta)$, $f_2^*(\xi)$ – произвольные функции интегрирования.

Здесь введены следующие безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{r}{b}, \quad \eta = \frac{z}{b}, \quad u_1 = \frac{u}{b}, \quad u_3 = \frac{w}{b}. \quad (6)$$

Решение уравнения (3) отыскивается в виде суммы четырех решений

$$u_1 = f^{(1)}(\xi) e^{\lambda\eta} + f^{(2)}(\xi) e^{-\lambda\eta} + f^{(3)}(\xi) \cos \lambda\eta + f^{(4)}(\xi) \sin \lambda\eta, \quad (7)$$

в котором $f^{(i)}(\xi)$ – неизвестные функции; λ – некоторое действительное число.

Для определения функций $f^{(i)}(\xi)$ получается

$$\Delta\Delta f^{(i)} + 2k_i \lambda^2 \Delta f^{(i)} + \lambda^4 f^{(i)} = 0, \quad (8)$$

в которых $k_i = 1$ при $i = 1, 2$, и $k_i = -1$ при $i = 3, 4$.

Если учесть (4), то уравнение (8) можно привести к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} + \kappa_i \lambda^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} + k_i \lambda^2 \right) f^{(i)} = 0. \quad (9)$$

Если провести замену

$$x = \lambda \xi, \quad (10)$$

то при условии, что λ отлично от нуля, уравнение (9) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + \kappa_i \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + k_i \right) f^{(i)}(x) = 0. \quad (11)$$

Линейно-независимые решения уравнения Бесселя ($k_i=1$) и модифицированного уравнения Бесселя ($k_i=-1$) первого рода

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + k_i \right) f^{(i)}(x) = 0 \quad (12)$$

даются функциями Бесселя действительного (I_1, Y_1 при $k_i = 1$) и мнимого (\dot{I}_1, K_1 при $k_i = -1$) аргументов [12].

Два других решения (11) при определенном k_i следует искать как частные решения уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + 1 \right) \tilde{f}^{(i)}(x) = C_1 I_1(x) + C_2 Y_1(x), \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} - 1 \right) \tilde{f}^{(i)}(x) = C_3 \dot{I}_1(x) + C_4 K_1(x). \quad (14)$$

Методом вариации произвольных постоянных [13] можно получить, что

$$f^{(i)}(x) = C_1^i I_1 + C_2^i Y_1 + C_3^i \left(-I_1 \int_{x_1}^x x I_1 Y_1 dx + Y_1 \int_{x_1}^x x I_1^2 dx \right) + C_4^i \left(-I_1 \int_{x_1}^x x Y_1^2 dx + Y_1 \int_{x_1}^x x I_1 Y_1 dx \right) \quad (15)$$

при $i = 1, 2$.

$$f^{(i)}(x) = C_1^i \dot{I}_1 + C_2^i K_1 + C_3^i \left(\dot{I}_1 \int_{x_1}^x x \dot{I}_1 K_1 dx - K_1 \int_{x_1}^x x \dot{I}_1^2 dx \right) + C_4^i \left(\dot{I}_1 \int_{x_1}^x x K_1^2 dx - K_1 \int_{x_1}^x x \dot{I}_1 K_1 dx \right) \quad (16)$$

при $i = 3, 4$.

Таким образом, решение уравнения (9) может быть записано в виде

$$f^{(i)}(\xi) = f^{(i)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=1}^4 C_k^i \psi^k(x), \quad (17)$$

в котором

$$\begin{bmatrix} \psi^1 & \psi^3 \\ \psi^2 & \psi^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & -I_1 \int_{x_1}^x x I_1 Y_1 dx + Y_1 \int_{x_1}^x x I_1^2 dx \\ Y_1 & -I_1 \int_{x_1}^x x Y_1^2 dx + Y_1 \int_{x_1}^x x I_1 Y_1 dx \end{bmatrix} \quad (18)$$

при $i = 1, 2$ и

$$\begin{bmatrix} \psi^1 & \psi^3 \\ \psi^2 & \psi^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & I_1 \int_{x_1}^x x I_1 K_1 dx - K_1 \int_{x_1}^x x I_1^2 dx \\ K_1 & I_1 \int_{x_1}^x x K_1^2 dx - K_1 \int_{x_1}^x x I_1 K_1 dx \end{bmatrix} \quad (19)$$

при $i = 3, 4$.

Тогда

$$u_1 = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_k^i \varphi_i(\lambda\eta) \psi^k(x), \quad (20)$$

где $\varphi_i(\lambda\eta)$ – базисные функции

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (e^{\lambda\eta}, e^{-\lambda\eta}, \cos \lambda\eta, \sin \lambda\eta). \quad (21)$$

При этом продольная компонента перемещения u_3 записывается в виде

$$u_3 = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_k^i k_i \dot{\varphi}_i(\lambda\eta) g^k(x) + f_1^*(\eta) + f_2^*\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad (22)$$

где под $\dot{\varphi}(\lambda\eta)$ подразумевается производная этой функции по η .

Для реализации единственности решения задачи с однородными граничными условиями на торцах $z = 0, z = \ell$ ($\eta = 0, \eta = \eta_1$) необходимо наложить на функцию $f_1^*(\eta)$ условие

$$f_1^*(\eta) \equiv 0. \quad (23)$$

Вторую произвольную функцию интегрирования $f_2^*(x)$ удобно отыскивать в виде

$$f_2^*(x) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 k_i A_k^i g^k(x), \quad (24)$$

где A_k^i – постоянные числа, подлежащие определению.

При условиях (23), (24) продольная компонента перемещения u_3 записывается в виде

$$u_3 = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 k_i [C_k^i \dot{\varphi}_i(\lambda\eta) - A_k^i] g^k(x). \quad (25)$$

В полученные соотношения входят неизвестные постоянные C_k^i , которые должны быть определены из граничных условий на боковых поверхностях цилиндра. Граничные условия на торцах цилиндра позволяют конкретизировать неизвестный параметр λ .

При условиях (2) полученные решения должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_k^i \varphi_i(\lambda * 0) \psi^k(x) = 0, \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_k^i \varphi_i(\lambda \eta_1) \psi^k(x) = 0,$$

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 k_i [C_k^i \dot{\varphi}_i(\lambda * 0) - A_k^i] g^k(x) = 0, \quad (27)$$

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 k_i [C_k^i \dot{\varphi}_i(\lambda \eta_1) - A_k^i] g^k(x) = 0.$$

Так как функции $\psi^k(x)$, $g^k(x)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) являются линейно независимыми, а системы уравнений (26), (27) должны удовлетворяться в произвольной точке x по радиусу торцевого сечения цилиндра, то для выполнения указанных условий необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при каждой из указанных функций обращались в нуль. Если кроме указанного обстоятельства учитывать, что функции $\psi^k(x)$, $g^k(x)$ попарно равны при $i = 1, 2$ и $i = 3, 4$, то можно получить системы уравнений относительно неизвестных постоянных C_k^i

$$\begin{aligned} C_k^1 + C_k^2 &= 0, \\ C_k^1 e^{\lambda\eta_1} + C_k^2 e^{-\lambda\eta_1} &= 0, \\ \lambda(C_k^1 - C_k^2) - A_k^1 - A_k^2 &= 0. \\ \lambda(C_k^1 e^{\lambda\eta_1} - C_k^2 e^{-\lambda\eta_1}) - A_k^1 - A_k^2 &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$k = 1, 2, 3, 4$ при $i = 1, 2$ и

$$\begin{aligned} C_k^3 &= 0, \\ C_k^3 \cos \lambda \eta_1 + C_k^4 \sin \lambda \eta_1 &= 0, \\ \lambda C_k^4 - A_k^3 - A_k^4 &= 0, \\ -\lambda(C_k^3 \sin \lambda \eta_1 - C_k^4 \cos \lambda \eta_1) - A_k^3 - A_k^4 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$k = 1, 2, 3, 4$ при $i = 3, 4$.

Однородная система уравнений (28) имеет только нулевое решение

$$C_k^1 = C_k^2 = A_k^1 = A_k^2 = 0. \quad (30)$$

Система уравнений (29) может иметь ненулевое решение, если

$$\sin \lambda \eta_1 = 0, \quad (31)$$

то есть при значениях параметра λ , равных

$$\lambda = \lambda_j = \frac{j\pi}{\eta_1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (32)$$

При указанных условиях последние два уравнения (29) совпадают, если только

$$\cos \lambda \eta_1 = 1. \quad (33)$$

Откуда следует, что значения j в (30) должны быть только четными. Таким образом,

$$\lambda = \lambda_j = \frac{2j\pi}{\eta_1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Если λ выбрано из соотношения (34), то, полагая постоянные A_k^3, A_k^4 равными, можно получить

$$A_k^3 = A_k^4 = \frac{1}{2} \lambda C_k^4. \quad (35)$$

Таким образом, при однородных в смысле перемещения условиях на торцах цилиндра частное решение для радиального перемещения получается в виде

$$u_1 = \sum_{k=1}^4 C_k^4 \sin(\lambda_j \eta) \psi^k(x). \quad (36)$$

Общее решение найдется как суперпозиция решений вида (36), то есть

$$u_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_k^j \psi^k(x) \sin(\lambda_j \eta). \quad (37)$$

Если радиальная компонента перемещения u_1 определяется из (37), то продольная компонента перемещения u_3 в силу (35) принимает вид

$$u_3 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_k^j (\cos \lambda_j \eta - 1) g^k(x). \quad (38)$$

Компоненты деформации и напряжений определяются

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_k^j \lambda_j \begin{bmatrix} \frac{d\psi^k}{dx} \\ \frac{\psi^k}{x} \\ -g^k \end{bmatrix} \sin \lambda_j \eta, \\ \varepsilon_{rz} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 [C_k^{*j} (\lambda_j \cos(\lambda_j \eta) - 1) + C_k^j] \psi^k, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$C_k^{*j} = 2 \left[C_k^j + (1 - \nu) C_{k+2}^j (\delta_3^{k+2} + \delta_4^{k+2}) \right], \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \tilde{\sigma}_\varphi \\ \sigma_\eta \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_k^j \lambda_j \begin{bmatrix} S_\xi^k \\ S_\varphi^k \\ S_\eta^k \end{bmatrix} \sin(\lambda_j \eta), \quad (41)$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 [C_k^{*j} (\lambda_j \cos(\lambda_j \eta) - 1) + C_k^j] \nu^k.$$

σ_i^j – символ Кронекера. Построенное решение для цилиндра конечной длины предполагает, что на наружной радиальной поверхности в качестве граничных условий используются перемещения (см. условие (1)). Этими перемещениями могут быть перемещения другого цилиндра, окружающего исследуемый цилиндр. Поэтому полученные решения можно использовать в контексте с изучением поведения других слоев слоистого цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. – Новосибирск, Наука, 2001. – 287 с.
- 2 Галеркин Б.Г. Упругое равновесие полого кругового цилиндра и части цилиндра // Изв. НИГИ. – 1933. – Т. 10,. – С. 5-9.
- 3 Бухаринов Г.Н. Осесимметрическая деформация цилиндра конечной длины // Вестник ЛГУ. – 1956. – № 7. – С. 77-87.
- 4 Байда Э.Н. Общее решение задачи об упруго-деформируемом состоянии слоистого и полого цилиндра // Научные доклады высшей школы. – 1959. – № 2. – С. 37-41.
- 5 Гринченко В.Г. Осесимметрическая теория упругости для толстого цилиндра конечной длины // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3, № 8. – С. 98-102.
- 6 Васильев Ю.Н. Приближенное решение осесимметрической задачи теории упругости для полого конечного цилиндра // Вестник МГУ. – 1970. – № 1. – С. 90-97.
- 7 Григоренко Я.М., Крюков Н.И. Исследование несимметрического НДС трансверсально-изотропных цилиндров при различных граничных условиях // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 7. – С. 3-10.
- 8 Олегин И.П. Определение напряженного состояния в трансверсально-изотропных цилиндрических телах // Научный вестник НГТУ. – 2001. – № 2. – С. 95-104.
- 9 Абрамян Б.Л. К задаче осесимметрической деформации круглого цилиндра // Докл. АН АрмССР. – 1958. – Т. 26, № 2. – С. 61-70.
- 10 Васильев В.Б., Лурье С.А. Осесимметрическая задача теории упругости для ортотропного цилиндра конечной длины // Механика и научно-технический прогресс. МДТТ. – Т. 3. – М.: Наука, 1988. – С. 181-196.
- 11 Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
- 12 Кузмин Р.О. Бесселевые функции. – Л.-М.: ГРОЛ, 1935. – 249 с.
- 13 Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Виц, 1963.

A. E. Bekayev

КӨП ҚАБАТТЫ ЦИЛИНДРДІҢ БІР ЕСЕБІ ТУРАЛЫ

Осесимметриялық күйде орналасқан шекті ұзындықты цилиндр карастырылған. Бұл макалада көп қабатты цилиндрдің көрнеу күйінің аналитикалық шешімі алынған.

A. E. Bekayev

ABOUT ONE PROBLEM OF THE MULTILAYERED CYLINDER

A cylinder of finite length in axial symmetric tension is considered. Analytical solution of the problem about intensity of the cylinder is received; this solution can be used when solving the problem about deformation tension of multilayered cylindrical body.