УДК 521.1

А.А.БЕКОВ, А.Н.БЕЙСЕКОВ, Л.Т.АЛДИБАЕВА

О ПОВЕРХНОСТЯХ ХИЛЛА В ОКРЕСТНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ГРАВИТИРУЮЩЕГО И ИЗЛУЧАЮЩЕГО ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА С НЕИЗОТРОПНЫМ ИСТЕЧЕНИЕМ МАССЫ

Рассматриваются аналоги поверхностей нулевой скорости в окрестности вращающегося трехосного гравитирующего и излучающего трехосного эллипсоида с медленно изменяющимися массой, размерами и формой, при неизотропном истечении массы.

Поверхности Хилла или поверхности нулевой скорости в задачах небесной механики дают возможность выяснить некоторые общие свойства относительного движения пассивно гравитирующего тела в заданном поле тяготения тел конечной массы [1]. Исследование поверхностей нулевой скорости и точек либрации в окрестности гравитирующего вращающегося с постоянной угловой скоростью трехосного эллипсоида проводилось в работе Ю.В.Батракова [2]. Частные решения задачи о движении материальной точки в окрестности вращающегося трехосного эллипсоида для стационарного фотогравитационного случая рассматривались в работе [3], а для нестационарного случая в различных формулировках в работах [4,5]. Исследование поверхностей Хилла в окрестности вращающегося трехосного эллипсоида с медленно изменяющимися массой, размерами и формой проводилось в работе [6]. Для изотропного случая фотогравитационной задачи [4] сохраняются результаты качественного анализа работы [6]. В настоящей работе рассматриваются поверхности Хилла в окрестности вращающегося гравитирующего и излучающего трехосного эллипсоида с медленно изменяющимися массой , размерами и формой при неизотропном случае истечения массы.

Рассмотрим движение пассивно гравитирующей точки во внешнем поле тяготения вращающегося с угловой скоростью Ω излучающего трехосного эллипсоида с медленно меняющимися со временем массой $M(t)$, редукционным параметром q ($0<q\leq 1$), размерами и формой. Принимаем анизотропный случай изменения массы пассивно гравитирующей точки (абсолютная скорость отделяющихся и присоединяющихся частиц равна нулю), то есть дополнительно учитывается реактивная сила, пропорциональная темпу изменения массы и скорости движения материальной точки. Полагаем, что медленное изменение физических параметров эллипсоида не приводит к смещению его центра масс

Уравнения движения материальной точки во вращающейся прямоугольной системе координат Oxyz с началом в центре масс O эллипсоида, с осями Ox, Oy, Oz , совпадающими с главными центральными осями инерции эллипсоида и с направлением угловой скорости Ω вращения эллипсоида, совпадающим с направлением оси Oz, могут быть преобразованием [5]:

$$\vec{r}(x,y,z)=l(t)\vec{\rho}(\xi,\eta,\varsigma),\, d\tau=\Omega dt, \qquad (1)$$

где $l(t)$ - множитель преобразования, $l^3\Omega^2\kappa=\mu(t)$, $\kappa=const$, $\mu(t)=GqM(t)$, G- гравитационная постоянная, приведены к автономному виду:

$$\xi''-2\eta'=\frac{\partial W}{\partial\xi},\ \eta''+2\xi'=\frac{\partial W}{\partial\eta},\ \varsigma''=\frac{\partial W}{\partial\varsigma}, \qquad (2)$$

где

$$W=\kappa U,$$

$$U=\frac{\rho^2}{2}-\frac{1}{\kappa}\frac{\varsigma^2}{2}+\frac{1}{\rho}+\varepsilon\frac{\alpha\xi^2+\beta\eta^2+\sigma\varsigma^2}{\rho^5}+\ldots,$$

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2+\varsigma^2. \qquad (3)$$

Здесь ε - параметр ($0<\varepsilon\ll 1$), α, β, σ - постоянные, удовлетворяющие условию $\alpha+\beta+\sigma=0$.

Сами функции $l(t)$ и $\Omega(t)$ определяющие преобразование (1) , параметр эллипсоида μ и масса m_3 пассивно гравитирующей точки определяются из соотношений

$$l^2\Omega m_3 = l_0^2\Omega_0 m_3 = C_0,$$

$$\ddot{l} + \frac{\dot{m}_3}{m_3}\dot{l} + (\kappa - 1)\Omega^2 l = 0 \quad (4)$$

$$l\mu m_3^2 = \kappa C_0^2 = const, \quad \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{\dot{m}_3}{m_3} = \frac{\dot{m}}{m}, \quad (5)$$

где m - функция времени, характеризующая одинаковый темп изменения масс тел, C_0 – постоянная (κ>0 , C_0>0), откуда находим частные решения законов изменения со временем параметров μ и m_3 в форме закона Эддингтона-Джинса при показателях n=3 и n=6:

$$\dot{\mu} = \alpha_0\mu^n, \quad \dot{m}_3 = \beta_0 m_3^n, \quad (n=3,6) \quad (6)$$

Автономные уравнения (2) имеют такой же вид, как и в случае изотропного истечения масс [4], следовательно, в рассматриваемом неизотропном случае исследование поверхностей Хилла проводится аналогично работе [6].

Система (2) допускает первый интеграл:

$$V^2 = 2W - C \quad (7)$$

где $V^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$; W определяется из формулы (3) ; C – постоянная Якоби. Интеграл (7) есть аналог интеграла Якоби, известного в задачах небесной механики [1] и имеющего место для движения материальной точки в окрестности гравитирующего эллипсоида постоянной массы [2]. Отметим, что выражение (7) отличается от интеграла Якоби классической задачи [2] наличием в правой части члена $\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)\zeta^2$, что обуславливает изменение вида поверхности Хилла.

Полагая в (7) V=0, получаем уравнение поверхностей нулевой относительной скорости:

$$2W = C, \quad (8)$$

которые в пространстве ξ, η, ζ ограничивают область возможного движения исследуемого тела.

Формула (7) позволяет вычислить скорость V движущейся точки, если задано ее положение в пространстве ξ, η, ζ и, наоборот, определить координаты движущейся точки, если задана скорость V. Границы области возможного движения определяют поверхности (8). Переходя к исходному пространству-времени (x , y , z , t) с помощью преобразования (1), приходим к выводу, что знание координат и скоростей областей возможного движения по формулам (7) и (8) дает к тому же области возможного движения в исходных координатах и времени. Следовательно, чтобы знать области возможного движения в переменных (x , y , z , t), необходимо сначала исследовать поверхность Хилла (8).

В случае k=1 поверхности (8) принимают вид поверхностей нулевой скорости в окрестности вращающегося стационарного трехосного эллипсоида. В общем случае они имеют более сложный вид и содержат параметр κ. Поскольку в поверхности (8) входят в выражения для W только квадраты координат ξ, η, и ζ, то они симметричны относительно трех координатных плоскостей: $\xi\zeta$, $\xi\eta$ и $\eta\zeta$. Стационарные решения уравнений (2) (точки либрации) [4, 5] рассматриваются как особые точки поверхностей Хилла.

Для построения поверхностей Хилла необходимо установить координаты всех особых точек, поведение этих поверхностей в окрестности гравитирующего и излучающего эллипсоида. Анализ уравнения (8), проведенный так же, как и в классическом случае проблемы, позволяет представить качественный характер и свойства поверхностей Хилла. Как и в классическом случае, при достаточно больших значениях постоянной Якоби C уравнение (8) может выполняться при достаточно больших значениях одного из членов в выражении для W , причем при анализе нужно отдельно рассматривать случаи малых и больших значений координат ξ, η, ζ и учитывать набор различных значений параметров κ, α, β и σ. Для каждой величины постоянной Якоби C имеем отдельную поверхность.

Для поверхностей Хилла (8) особые точки даются уравнениями

$$W'_\xi = 0, \quad W'_\eta = 0, \quad W'_\zeta = 0. \quad (9)$$

Физический смысл особых точек следует из уравнений (2), откуда видно, что в этих точках

$$\xi' = \eta' = \zeta' = 0, \quad \xi'' = \eta'' = \zeta'' = 0, \quad (10)$$

т.е. это положения относительного равновесия в координатах Нехвила или точки либрации. В исходных координатах x , y , z , и времени t указанные точки либрации будут определять, согласно (1), соответствующие частные решения

рассматриваемой задачи о движении материальной точки в поле тяготения вращающегося гравитирующего и излучающего трехосного эллипсоида при неизотропном изменении массы пассивно гравитирующего тела. В работах [4, 5] определены положения экваториальных $P_1 - P_4$ и полярных $P_{5,6}$ точек либрации. Они находятся из уравнений (9), и в принятых единицах (4), (5) имеем:

$$P_1(P_3):\ \xi = \pm 1 \pm \varepsilon\alpha + \ldots\ ,\quad \eta = 0\ ,\quad \varsigma = 0,$$

$$P_2(P_4):\quad \xi = 0\ ,\quad \eta = \pm 1 \pm \varepsilon\beta + \ldots\ ,\quad \varsigma = 0. \qquad (11)$$

$$P_5(P_6): \xi = 0,\ \eta = 0,$$

$$\varsigma = \pm\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)^{\frac{1}{3}} \pm \varepsilon\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)^{\frac{1}{3}}\sigma + \ldots$$

В случае k=1, как следует из (11), кроме экваториальных решений P_1 –P_4 уравнения (9) допускают также существование двух бесконечно удаленных точек либрации: $P_{+\infty}$ и $P_{-\infty}$, для которых $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \pm\infty$.

Кроме решений вида $P_1 - P_6$ (11) уравнения (9) допускают решения, находящиеся вне экваториальной плоскости эллипсоида и полярной оси эллипсоида [7]. Это решения типа $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\zeta \neq 0$. Выражения для характеристик и условия существования таких решений более громоздки, нежели в случае решений (11), поэтому ограничимся краткой классификацией подобных решений. Это решения типа $(\alpha = \beta < \sigma,\ \ \xi = \eta \neq 0, \zeta \neq 0)$, располагающиеся на окружности, параллельной плоскости $\xi\eta$. Такие решения можно поэтому называть кольцевыми решениями P_0. Затем возможны два типа компланарных решений: $P_{\xi\zeta}$ - решения, расположенные в плоскости $\xi\zeta$ $(\alpha \neq \beta < \sigma)$, и $P_{\eta\zeta}$ - решения, расположенные в плоскости $\eta\zeta$ $(\alpha \neq \beta < \sigma)$. Отметим, что указанные решения – кольцевые и компланарные- существуют для больших значений параметра k, что эквивалентно медленному вращению эллипсоида.

Кроме указанных решений существует другой класс полярных решений – z-решения в окрестности гравитирующего и излучающего эллипсоида, расположенные вдоль оси вращения эллипсоида [7].

Знание точек либрации и выражения (8) для поверхностей нулевой скорости позволяют провести качественный анализ поверхностей Хилла для различных значений параметров κ, α, β и σ.

Рассмотрим изменение формы поверхностей Хилла в зависимости от величины С. Поверхности Хилла

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\zeta^2 + \frac{2}{\rho} + 2\varepsilon\frac{\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \sigma\zeta^2}{\rho^5} + \ldots = \frac{C}{\kappa} \qquad (12)$$

при k=1 дают поверхности нулевой скорости классической проблемы [2]. Для больших C/κ при k=1 поверхность (12) состоит из двух отдельных поверхностей. Это квазицилиндр, заключающий в себе квазисферу с центром в центре эллипсоида.

При $\kappa \to \infty$ внешний цилиндр превращается в сферу:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{C}{\kappa}. \qquad (13)$$

При $\infty > \kappa > 1$ внешняя поверхность есть эллипсоид вращения, вытянутый вдоль оси $O\zeta$:

$$\xi^2 + \eta^2 + (1 - \frac{1}{\kappa})\zeta^2 = \frac{C}{\kappa}. \qquad (14)$$

При $\kappa \to 1$ внешний эллипсоид, вытягиваясь, стремится к цилиндру.

При $\kappa < 1$ коэффициент при ζ^2 становится отрицательным, внешняя поверхность представляет собой однополостный гиперболоид.

При уменьшении C/κ внешняя поверхность сжимается, а внутренняя квазисфера будет при этом увеличиваться, и при некоторых значениях C/κ каждая пара этих поверхностей будет иметь общую точку. При дальнейшем уменьшении C/κ поверхность Хилла становится двуполостной, и далее полости стягиваются в точки P_5 и P_6, расположенные симметрично относительно плоскости $\xi\eta$. Поверхности Хилла разнообразны ввиду наличия параметров κ, α, β и σ. Используя (12), нетрудно получить кривые нулевой скорости – сечения координатными поверхностей Хилла для заданных значений параметров. Кривые нулевой скорости при этом дают представление о свойствах поверхностей Хилла и позволяют

выявить качественно новые особенности движения в окрестности вращающегося гравитирующего и излучающего трехосного эллипсоида.

Работа выполнена в рамках ПФИ, шифр Ф-0351.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Наука, 1975. 799с.

2. *Батраков Ю.В.* Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида// Бюлл. ИТА. 1957, т.6, № 8, с. 524-542.

3. *Журавлев С.Г.* Фотогравитационная ограниченная задача двух тел// Вопросы небесной механики и звездной динамики. Алма-Ата, Наука. 1990, с. 23-28.

4. *Беков А.А., Бейсеков А.Н., Алдибаева Л.Т.* К динамике нестационарных двойных звездных систем// Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2005. № 4. с.10-15.

5. *Беков А.А., Бейсеков А.Н., Алдибаева Л.Т.* К динамике нестационарных двойных звездных систем с неизотропным истечением массы// Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2006. № 4. с. 3-7

6. *Беков А.А.* О поверхностях Хилла в окрестности вращающегося нестационарного трехосного эллипсоида// Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. 1990. № 4. с.49-52.

7. *Беков А.А.* О движениях частицы в окрестности гравитирующего вращающегося трехосного эллипсоида с переменными физическими параметрами// Труды АФИ. 1992. Т.50. с. 45-61.

Резюме

Изотропикалық емес массаның ағынымен массасы, өлшемі және формасы баяу өзгеретін үш осьті айналмалы гравитация және сәуле шығарғыш эллипсоид төңірегіндегі ноль жылдамдықты беттердің аналогтары карастырылады.

Summary

The analogies of the zero velocity surfaces in the neighbourhood of the gravitating and radiating general ellipsoid with slow variations of mass, sizes and form and with nonisotropic mass flow are considered.

Астрофизический институт
им. В.Г.Фесенкова МОН РК,
г. Алматы

Поступила 27 апреля 2007 г.