УДК 521.1

А.А. БЕКОВ

КОСМИЧЕСКАЯ СТАНЦИЯ В ФОТОГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ДВУХ ТЕЛ

Рассматривается движение космической станции в фотогравитационном поле двух тел. Найдены равновесные ориентации корпуса станции в области лагранжевых точек либрации.

Движение тела P массой m будем рассматривать в поле двух гравитирующих и излучающих тел, считаемых материальными точками и обращающимися друг относительно друга по круговым орбитам с постоянной угловой скоростью относительно оси Oz в барицентрической системе координат Oxyz с осью Ox, поведенной вдоль прямой соединяющей основные тела. Ось Oz направлена перпендикулярно плоскости орбитального движения в сторону, откуда вращение движения видно происходящим против часовой стрелки. При этом для удобства выберем следующие единицы измерения: сумму масс основных тел примем за единицу массы, расстояние между ними – за единицу длины, $T/2\pi$ - за единицу времени (T - период обращения тел). Тогда уравнения движения пассивно гравитирующего тела (космической станции) в рамках ограниченной фотогравитационной задачи трех тел можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad i=1,2,\ldots,6, \tag{1}$$

где функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} L=&\frac{m}{2}\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+2(\dot{y}x-\dot{x}y)+(x^2+y^{2)}\right]+\\ &+\frac{1}{2}\Big\{\left[(a_1\sin^2\varphi+a_2\cos^2\varphi)\sin^2\theta+a_3\cos^2\theta\right](\dot{\psi}+1)^2+\\ &+(a_1-a_2)\dot{\vartheta}(\dot{\psi}+1)\sin\vartheta\sin 2\varphi+\\ &+(a_1\cos^2\varphi+a_2\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2+\\ &+a_3\left[\dot{\varphi}^2+2\dot{\varphi}(\dot{\psi}+1)\cos\vartheta\right]\Big\}+W_1+W_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь единица в качестве слагаемого к $\dot{\psi}$ отвечает угловой скорости вращения системы Oxyz; a_1, a_2, a_3 - главные центральные моменты инерции твердого тела; x,y,z (q_1,q_2,q_3) - координаты центра масс во вращающейся вместе с основными телами системе координат; ψ,θ,φ (q_1,q_2,q_3) - углы Эйлера.

Главные центральные оси инерции станции примем за оси системы координат $Px_1x_2x_3$, тогда угол нутации θ - есть угол между осями z и x_3, угол прецессии ψ - есть угол между осью x и линией узлов, угол собственного вращения φ - угол между линией узлов и осью x_1.

W_1, W_2 - силовые функции, учитывающие гравитационные силы и силы светового давления со стороны двух основных тел. Считая, что характерный размер l станции много меньше расстояния

$$R_i=\left[(x-x_i)^2+y^2+z^2\right]^{1/2} \qquad (i=1,2) \tag{3}$$

между центром масс P тела (станции) с основными телами, пренебрегая членами l^3/R_i^3 и выше как в [1], имеем приближенные выражения для W_1 и W_2:

$$\begin{aligned} W_1=&\frac{q_1(1-\mu)m}{R_1}-\frac{3}{2}\frac{q_1(1-\mu)m}{R_1^3}(a_1\gamma_{11}^2+\\ &+a_2\gamma_{12}^2+a_3\gamma_{13}^2-\frac{a_1+a_2+a_3}{3}), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} W_2=&\frac{q_2\mu m}{R_2}-\frac{3}{2}\frac{q_2\mu m}{R_2^3}(a_1\gamma_{21}^2+\\ &+a_2\gamma_{22}^2+a_3\gamma_{23}^2-\frac{a_1+a_2+a_3}{3}), \end{aligned}$$

где q_1, q_2 - коэффициенты редукции массы тел [2],

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{R_i}\left[(x - x_i)\alpha_j + y\beta_j + z\gamma_j\right]$$

$$(i = 1,2;\ j = 1,2,3) \qquad (5)$$

- направляющие косинусы углов между осями x_j и радиус-вектором $\vec{R}_j$, а $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ - между осями x_j и x, y, z соответственно, которые выражаются через углы Эйлера формулами:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
\alpha_2 &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
\alpha_3 &= \sin\theta\sin\psi,\\
\beta_1 &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
\beta_2 &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
\beta_3 &= -\sin\theta\cos\psi,\\
\gamma_1 &= \sin\theta\sin\varphi,\\
\gamma_2 &= \sin\theta\cos\varphi,\\
\gamma_3 &= \cos\theta.
\end{aligned} \qquad (6)$$

Первые три уравнения $i = 1,2,3)$ системы (1) описывают движение центра масс станции, остальные $(i = 4,5,6)$ - движение станции относительно центра масс. Из (1) и (2) видно, что при $a_s = 0$ $(s = 1,2,3)$ уравнения (1) принимают вид уравнебний движения материальной точки. При $a_s \neq 0$ уравнения движения центра масс станции отличаются от уравнений движения соответствующей материальной точки малыми поправками, которыми в рассматриваемом случае можно пренебречь. Отсюда следует, что взаимные влияния движения центра масс и движения вокруг центра масс малы.

Измененную потенциальную энергию действующих на станцию (тело) сил инерции и гравитационных сил в выбранных нами единицах можем записать так

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} a_s\gamma_s^2 - \frac{1}{2}m(x^2 + y^2) - W_1 - W_2. \qquad (7)$$

Если положить $a_s = l^2 a_s'$, тогда подобно [3] в выражение для U можно ввести малый параметр $\varepsilon = l^2 << 1$ (напомним, что за единицу длины принято расстояние между основными телами), тогда

$$U = mU_1(x, y, z) + \varepsilon U_2(x, y, z, \psi, \theta, \varphi), \qquad (8)$$

здесь

$$U_1 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{q_1(1-\mu)}{R_1} - \frac{q_2\mu}{R_2},$$

$$\begin{aligned}
U_2 = \frac{3}{2}\Bigg\{&\left[\frac{q_1(1-\mu)}{R_1^3}\gamma_{11}^2 + \frac{q_2\mu}{R_2^3}\gamma_{21}^2\right]a_1' +\\
&+\left[\frac{q_1(1-\mu)}{R_1^3}\gamma_{12}^2 + \frac{q_2\mu}{R_2^3}\gamma_{22}^2\right]a_2' +\\
&+\left[\frac{q_1(1-\mu)}{R_1^3}\gamma_{13}^2 + \frac{q_2\mu}{R_2^3}\gamma_{23}^2\right]a_3'\Bigg\} -\\
&-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}\left[\gamma_s^2 + \frac{q_1(1-\mu)}{R_1^3} + \frac{q_2\mu}{R_2^3}\right]a_s'.
\end{aligned} \qquad (9)$$

В случае движения тела P массой m в нестационарном поле двух гравитирующих и излучающих тел рассматриваем принятую нами постановку задачи с дополнительным учетом переменности фотогравитационных параметров $\mu_i (i = 1,2)$ основных тел [4]. Тогда уравнения движения пассивно гравитирующего тела в рамках нестационарной фотогравитационной задачи можно записать в виде (1) с функцией Лагранжа, явно зависящей от времени $L = L(\dot{q}_i, q_i, t)$ $(i = 1,2,...,6)$, поскольку в выражениях W_1 и W_2 входят функции времени

$$\mu_i = GM_i q_i = \mu_i(t), \quad (i = 1,2). \qquad (10)$$

Будем предполагать, что изменение гравитационных параметров μ_i основных тел со временем происходит медленно, в частности функции μ_i могут определяться первым законом Мещерского. Теперь проведем преобразование Мещерского для координат и времени [5], тогда, учитывая медленность изменения параметров $\mu_i(t)$, пренебрегая малыми поправками, ко-

торыми отличаются уравнения движения тела P в стационарном случае и соответствующем нестационарном, получим автономную форму уравнений движения с лагранжианом в новых переменных вида:

$$L_0 = \frac{m}{2}\left[\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + 2(\eta'\xi - \xi'\eta) + (\xi^2 + \eta^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\left[(a_1 \sin^2\varphi + a_2\cos^2\varphi)\sin^2\theta + a_3\cos^2\theta\right](\psi' + 1)^2 + \right.$$
$$+ (a_1 - a_2)\theta'(\psi' + 1)\sin\vartheta\sin 2\varphi +$$
$$+ (a_1\cos^2\varphi + a_2\sin^2\varphi)\theta'^2 +$$
$$\left. + a_3\left[\varphi'^2 + 2\varphi'(\psi' + 1)\cos\vartheta\right]\right\} + W_1 + W_2, \qquad (11)$$

где W_1 и W_2 имеют вид (3), в которых нужно заменить переменные x, y, z на ξ, η, ζ. Поскольку в изображающих переменных ξ, η, ζ, τ вид функции Лагранжа (9) имеет тот же вид, что и функция Лагранжа (2) в переменных x, y, z, t для стационарной задачи, то исследования положений равновесия и устойчивости, проводимые для стационарного случая, можно аналогично рассматривать и для нестационарной задачи, применяя их для автономной формы (9) в переменных ξ, η, ζ, τ. Результаты для нестационарного случая получаются отсюда переходом к исходным переменным, учитывая преобразование переменных и метод анализа устойчивости неавтономных динамических систем [6].

Положения относительного равновесия центра масс и корпуса станции, вытекающие из условия $\delta U = 0$ стационарности функции U, отвечают уравнениям

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\partial U_2}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\partial U_2}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U_2}{\partial \theta} = \frac{\partial U_2}{\partial \psi} = \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} = 0 \qquad (12)$$

Решение уравнений (12) можно искать в виде

$$x = x_{(0)} + \varepsilon x_{(1)} + 0(\varepsilon^2), \quad (xyz)$$
$$\theta = \theta_{(0)} + \varepsilon\theta_{(1)} + 0(\varepsilon^2), \quad (\theta\psi\varphi). \qquad (13)$$

Для определения величин $x_{(0)}, y_{(0)}, z_{(0)}$ имеем уравнения

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial z} = 0, \qquad (14)$$

совпадающие с уравнениями относительного равновесия фотогравитационной круговой задачи трех тел в случае, когда станция принимается *за материальную точку* [7]. Следовательно, эти уравнения имеют в качестве решений три коллинеарные L_1, L_2, L_3, две треугольные L_4, L_5 и две компланарные L_6, L_7 точки либрации.

Угловые величины $\theta^*, \psi^*, \varphi^*$ определяющие ориентацию станции находятся из последних уравнений (12), в которые вместо x, y, z подставлены координаты одной из точек либрации.

Рассмотрим случай, когда x^*, y^*, z^* являются координатами одной из треугольных точек либрации. Тогда в последних уравнениях (12) вместо x, y, z и R_1, R_2 необходимо подставить соответственно [8, 9]:

$$x = x^* = \frac{1}{2}(q_1^{2/3} - q_2^{2/3} - \mu),$$
$$y = y^* = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(q_1^{2/3} + q_2^{2/3}\right) - \left(q_1^{2/3} - q_2^{2/3}\right)^2 - 1},$$
$$z = z^* = 0, \qquad (15)$$
$$R_1 = q_1^{1/3}, \qquad R_2 = q_2^{1/3}.$$

Подставляя (15) в (12), нетрудно убедиться, что рассматриваемые уравнения допускают решения

$$\theta = \theta^* = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \varphi^* = 0, \quad \psi = \psi^*, \qquad (16)$$

где

$$\psi^* = \pm\frac{1}{2}arctg\left\{2\sqrt{2(q_1^{2/3} + q_2^{2/3}) - (q_1^{2/3} - q_2^{2/3})^2 - 1} \times\right.$$
$$\times\left[(1-\mu)q_1^{2/3}(q_1^{2/3} - q_2^{2/3} + 1) + \mu q_2^{2/3}(q_1^{2/3} - q_2^{2/3} - 1)\right]:$$
$$:\left[(1-\mu)q_1^{-2/3}((q_1^{2/3} - q_2^{2/3} + 1)^2 + (2(q_1^{2/3} + q_2^{2/3}) - \right.$$
$$- (q_1^{2/3} - q_2^{2/3})^2 - 1)) + \mu q_2^{-2/3}((q_1^{2/3} - q_2^{2/3} - 1)^2 - \qquad (17)$$
$$\left.\left. - (2(q_1^{2/3} + q_2^{2/3}) - (q_1^{2/3} - q_2^{2/3})^2 - 1))\ \right]\right\}.$$

Анализ последнего выражения показал, что для значений коэффициентов редукции q_1, q_2 $(-\infty < q_i \le 1, \quad i = 1,2)$ и безразмерной массы μ $(0 < \mu < 1)$ угол ψ^* принимает значения в

интервале $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. Учитывая , что при изменении аргумента функции $tg2\psi^*$ на ее период π оси x_1 и x меняются местами, нетрудно показать соответствие каждому значению ψ^* и ψ^{**} $(\psi^{**}=\psi^*+\frac{\pi}{2})$ двух динамически эквивалентных положений равновесия.

Для нестационарного случая положения равновесия ξ^*,η^*,ζ^* и $\psi^*,\varphi^*,\theta^*$ будут определяться теми же аналогичными формулами (15) и (16).

Таким образом, решения (16) системы (12) задают две пары динамически эквивалентных положений равновесия в рассматриваемой задаче.

Работа выполнена в рамках ПФИ, шифр Ф-0351.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1981. 560 с.

2. *Радзиевский В.В.* Задача двух гравитирующих и излучающих тел // Астроном. журн. 1951. Т.28, вып.5. С. 363-372.

3. *Рубановский В.Н.* Об относительном равновесии спутника-гиростата в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Прикладная математика и механика. 1981. Т.45, вып. 3. С. 494-503.

4. *Беков А.А., Рыстыгулова В.Б.* О движении тел в нестационарном фотогравитационном поле двойной звезды // Десятая Российская гравитационная конференция «Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности и гравитации». Владимир.1999. № 4. С.140.

5. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. М.:ГИТТЛ, 1952, 105 с.

6. *Беков А.А.* Об устойчивости неавтономных динамических систем // Известия МН-АН РК. Серия физ.-мат., 1998, № 4, с.57-60.

7. *Беков А.А., Рыстыгулова В.Б.* О частных решениях нестационарной фотогравитационной задачи трех тел // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физ.- мат.,2002, № 4, с. 47-49.

8. *Беков А.А., Рыстыгулова В.Б.* Космическая станция в нестационарном фотогравитационном поле двойной звезды // Вестник КазГНУ. Серия физическая.1999, № 6. С.170.

9. *Турешбаев А.Т.* Об устойчивости компланарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в Астрон. журнал. 1986. Т.12, № 9. С.722-725.

Резюме

Ғарыштық станциясының екі денелердің фотогравитациялық өрісінде қозғалыс қарастырылады. Лагранж либрация нүктелер саласында станция дененің тең жағдайлар табылды.

Summary

The motion of cosmic station in the photogravitational field of two bodies is considered. The equilibrium orientations of station in the neighbourhood of lagrange libration points are obtained.

Астрофизический институт
им. В.Г.Фесенкова МОН РК,
г. Алматы

Поступила 16.0672008 г.