УДК 521.1

А. А. БЕКОВ[1], М. Д. ШИНИБАЕВ[1], А. Н. УРАЗГЕЛЬДИЕВА[2], С. А. ЖАППАРОВ[2],

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ТИП ДВИЖЕНИЯ ИСЗ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ЗЕМЛИ

(интервал $\alpha_4 < w < \alpha_3$, случай $\nu(t) = \nu_0^2 t^2$)

На интервале $\alpha_4 < w < \alpha_3$ получены полярные координаты близкого ИСЗ в случае нестационарного поля тяготения Земли для эллиптического типа движения с точностью $O(k^2)$, где k – модуль эллиптического интеграла 1-го рода. Полярные координаты содержат как вековые, так и смешанные члены.

Пусть близкий ИСЗ совершает движение в нестационарном поле тяготения Земли на основной плоскости. В случае ν – const на интервале $\alpha_4 < w < \alpha_3$ были найдены полярные координаты ИСЗ*, как явные функции времени с точностью $O(k^4)$. Найдем полярные координаты близкого ИСЗ в случае нестационарного поля тяготения, принимая решения, найденные в стационарном поле тяготения, за первое приближение, ограничиваясь членами рядов $O(k^2)$ включительно:

$$\rho = (\rho_{00} + \frac{1}{2}\rho_{12}k^2) + k^2\rho_{12}\frac{1}{2}\cos 2\varphi, \tag{1}$$

$$\vartheta = (\vartheta_{00} + k^2\vartheta_{02})\varphi + k^2\vartheta_{12}\sin 2\varphi, \tag{2}$$

$$t = (t_{00} + k^2 t_{02})\varphi + k^2 t_{12}\sin 2\varphi, \tag{3}$$

$$\varphi = (\varphi_{00} + k^2\varphi_{02})t + k^2\varphi_{12}\sin 2t. \tag{4}$$

Дифференциальные уравнения движения близкого ИСЗ в нестационарном поле тяготения Земли имеют вид:

$$\ddot{\rho} = \frac{C^2}{\rho^3} - \frac{\mu}{\rho^2} + \nu(t)\rho, \tag{5}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{\rho^2}. \; C - \text{const}, \; \mu - \text{const}. \tag{6}$$

Перепишем (5) в следующем виде

$$\ddot{\rho} = C^2\rho^{-3} - \mu\rho^{-2} + \rho\nu_0^2 t^2. \tag{7}$$

Используя (1), (3) вычислим $\rho\nu_0^2 t^2$

$$\rho\nu_0^2 t^2 = \left(\rho_{00} + \frac{1}{2}\rho_{12}k^2 + \frac{1}{2}\rho_{12}{}^2\cos 2\varphi\right)\cdot\nu_0^2\cdot\left[(t_{00}^2 + 2t_{00} + t_{02}k^2)\varphi^2 + 2t_{00}t_{12}k^2\varphi\sin 2\varphi\right] =$$

$$= \rho_{00}\nu_0^2 t_{00}^2\varphi^2 + 2t_{00}t_{02}\rho_{00}\nu_0^2 k^2\varphi^2 + 2t_{00}t_{12}\nu_0^2\rho_{00}k^2\varphi\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\rho_{12}\nu_0^2 t_{00}k^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\rho_{12}k^2\nu_0^2 t_{00}^2\varphi^2\cos 2\varphi =$$

$$= \left[\rho_{00}\nu_0^2 t_{00}^2 + k^2\left(2t_{00}t_{02}\rho_{00}\nu_0^2 + \frac{1}{2}\rho_{12}\nu_0^2 t_{00}^2\right)\right]\varphi^2 + k^2(2t_{00}t_{12}\nu_0^2\rho_{00})\varphi\sin 2\varphi + k^2\left(\frac{1}{2}\rho_{12}\nu_0^2 t_{00}^2\right)\varphi^2\cos 2\varphi.$$

**Шинибаев М.Д., Есенов Е.К.* Орбитальные движения близкого ИСЗ в нестационарном поле тяготения Земли. Алматы: Гылым, 2009. 89 с.

Полученные результаты перепишем в следующем виде

$$\rho v_0^2 t^2 = (v_{00} + k^2 v_{02})\varphi^2 + k^2 v_{12}\varphi \sin 2\varphi + k^2 v_{22}\varphi^2 \cos 2\varphi, \tag{8}$$

где $v_{00} = \rho_{00} v_0^2 t_{00}^2$, $v_{02} = 2t_{00} t \rho_{00} v_0^2 + \frac{1}{2}\rho_{12} v_0^2 t_{00}^2$, $v_{12} = 2t_{00} t_{12} v_0^2 \rho_{00}$, $v_{22} = \frac{1}{2}\rho_{12} v_0^2 t_{00}^2$.

Используя (3) и (8), перепишем (7) в следующем виде:

$$d\dot{\rho} = (\delta_{00} + k^2\delta_{02})d\varphi + k^2\delta_{12}\cos 2\varphi d\varphi + (\delta_{20} + k^2\delta_{22})\varphi^2 d\varphi + k^2\delta_{32}\varphi \sin 2\varphi d\varphi + k^2\delta_{42}\varphi^2 \cos 2\varphi\, d\varphi, \tag{9}$$

где введены обозначения

$$\delta_{00} = t_{00}\rho_{00}^{-2}(\rho_{00}^{-1}C^2 - \mu), \quad \delta_{02} = t_{00}\rho_{00}^{-2}\left[\left(\mu - \frac{3}{2}C^2\rho_{00}^{-1}\right)\rho_{12}\rho_{00}^{-1} + t_{02}t_{00}^{-1}(\rho_{00}^{-1}C^2 - \mu)\right],$$

$$\delta_{12} = t_{00}\rho_{00}^{-2}\left[\left(\mu - \frac{3}{2}C^2\rho_{00}^{-1}\right)\rho_{12}\rho_{00}^{-1} + 2t_{02}t_{00}^{-1}(\rho_{00}^{-1}C^2 - \mu)\right], \quad \delta_{20} = t_{00}v_{00},$$

$$\delta_{22} = t_{00}(v_{02} + t_{02}t_{00}^{-1}v_{00}), \quad \delta_{32} = t_{00}v_{12}, \quad \delta_{42} = t_{00}(v_{22} + 2t_{12}t_{00}^{-1}v_{00}).$$

Проинтегрируем (9) от нуля до верхних переменных пределов

$$\dot{\rho} = (\delta_{00} + k^2\delta_{02})\varphi + k^2\delta_{12}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi + (\delta_{20} + k^2\delta_{22})\frac{1}{3}\varphi^3 + k^2\delta_{32}\left[\frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{2}\varphi\cos 2\varphi\right] +$$

$$+ k^2\delta_{42}\left[\frac{1}{2}\varphi\cos 2\varphi + \left(\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{4}\right)\sin 2\varphi\right] = (\delta_{00} + k^2\delta_{02})\varphi + (\delta_{20} + k^2\delta_{22})\frac{1}{3}\varphi^3 +$$

$$+ k^2\left(\frac{1}{2}\delta_{12} + \frac{1}{4}\delta_{32} - \frac{1}{4}\delta_{42}\right)\sin 2\varphi + k^2\left(-\frac{1}{2}\delta_{32} + \frac{1}{2}\delta_{42}\right)\varphi\cos 2\varphi + k^2\left(\frac{1}{2}\delta_{42}\right)\varphi^2 \sin 2\varphi. \tag{10}$$

Перепишем (10) в следующем виде:

$$d\rho = (\pi_{00} + k^2\pi_{02})\varphi d\varphi + (\pi_{10} + k^2\pi_{12})\varphi^3 d\varphi + k^2\pi_{22}\sin 2\varphi d\varphi + k^2\pi_{32}\varphi\cos 2\varphi d\varphi +$$

$$+ k^2\pi_{42}\varphi^2 \sin 2\varphi d\varphi + k^2\pi_{52}\varphi^3 \cos 2\varphi d\varphi. \tag{11}$$

Проинтегрируем (11) от нуля до верхних переменных пределов:

$$\rho = k^2 P_{00} + (P_{10} + k^2 P_{12})\varphi^2 + (P_{20} + k^2 P_{22})\varphi^4 + k^2 P_{32}\cos 2\varphi + k^2 P_{42}\varphi\sin 2\varphi +$$

$$+ k^2 P_{52}\varphi^2 \cos 2\varphi + k^2 P_{62}\varphi^3 \sin 2\varphi, \tag{12}$$

где

$$P_{00} = \frac{1}{2}\pi_{22} - \frac{1}{4}\pi_{32} - \frac{1}{4}\pi_{42} + 6\pi_{52}, \; P_{10} = \frac{1}{2}\pi_{00}, \; P_{12} = \frac{1}{2}\pi_{02}, \; P_{20} = \frac{1}{4}\pi_{10}, \; P_{22} = \frac{1}{4}\pi_{12},$$

$$P_{32} = -\frac{1}{2}\pi_{22} + \frac{1}{4}\pi_{32} + \frac{1}{4}\pi_{42} - 6\pi_{52}, \; P_{42} = \frac{1}{2}\left(\pi_{32} + \pi_{42} - \frac{3}{2}\pi_{52}\right), \; P_{52} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi_{52} - \pi_{42}\right), \; P_{62} = \frac{1}{2}\pi_{52}.$$

Перепишем (12) в следующем виде

$$\rho = 1 - k'^2 - k^2 + (k^2 P_{10} + k^2 P_{10} + k^2 P_{12})\varphi^2 + (k'^2 P_{20} + k^2 P_{20} + k^2 P_{22})\varphi^4 +$$

$$+ k^2 P_{32}\cos 2\psi + k^2 P_{42}\varphi\sin 2\varphi + k^2 P_{52}\varphi^2 \cos 2\varphi + k^2 P_{62}\varphi^3 \sin 2\varphi. \tag{13}$$

Используя (13), перепишем (6) в следующем виде

$$d\vartheta = C\rho^{-2}dt = \begin{bmatrix} (\chi_{00} + k^2\chi_{02}) + (\chi_{10} + k\chi_{12})\varphi^2 + (\chi_{20} + k^2\chi_{22})\varphi^4 + (\chi_{30} + k^2\chi_{32})\varphi^6 + \\ + (\chi_{40} + k^2\chi_{42})\varphi^8 + k^2\chi_{52}\cos 2\varphi + k^2\chi_{62}\varphi\sin 2\varphi + k^2\chi_{72}\varphi^2\cos 2\varphi + \\ + k^2\chi_{82}\varphi^3\sin 2\varphi + k^2\chi_{92}\varphi^4\cos 2\varphi + k^2\chi_{102}\varphi^5\sin 2\varphi + k^2\chi_{112}\varphi^6\cos 2\varphi + \\ + k^2\chi_{122}\varphi^7\sin 2\varphi + + k^2\chi_{132}\varphi^8\cos 2\varphi \end{bmatrix} d\varphi, \tag{14}$$

где

$$\chi_{00} = 6Ct_{00}\,,\ \chi_{02} = 6Ct_{02}\,,\ \chi_{10} = -2Cl_{00}t_{00}\,,\ \chi_{12} = -2C(t_{00}P_{12} + P_{00}t_{02})\,,$$

$$\chi_{20} = Ct_{00}(3P_{10}^2 - 2P_{20})\,,\ \chi_{22} = 2Ct(3P_{10}P_{12} - P_{22}) + Ct_{02}(3P_{10}^2 - 2P_{20})\,,$$

$$\chi_{30} = 6t_{00}CP_{10}P_{20}\,,\ \chi_{32} = 6CP_{10}(t_{00}P_{22} + t_{02}P_{20})\,,\ \chi_{40} = 3Ct_{00}P_{10}^2\,,$$

$$\chi_{42} = 3CP_{20}(t_{00}P_{22} + t_{02}P_{20})\,,\ \chi_{52} = C(12t_{12} + t_{00}P_{32})\,,\ \chi_{62} = Ct_{00}P_{42}\,,$$

$$\chi_{72} = C(t_{00}P_{52} + t_{00}6P_{10}P_{32} - 4t_{12}P_{10})\,,\ \chi_{82} = Ct_{00}(P_{62} + 6P_{10}P_{42})\,,$$

$$\chi_{92} = 6t_{00}C(P_{10}P_{52} + P_{20}P_{32}) - 2Ct_{12}(2P_{20} - 3P_{10}^2)\,,\ \chi_{102} = Ct_{00}(P_{10}P_{62} + P_{20}P_{42})\,,$$

$$\chi_{112} = CP_{20}6(t_{00}P_{52} + 2t_{12}P_{10})\,,\ \chi_{122} = 6Ct_{00}P_{20}P_{62}\,,\ \chi_{132} = 6Ct_{12}P_{20}^2\,.$$

Проинтегрируем (14) от нуля до верхних переменных пределов:

$$\vartheta = (\chi_{00} + k^2\chi_{02})\varphi + \frac{1}{3}(\chi_{10} + k^2\chi_{12})\varphi^3 + \frac{1}{5}(\chi_{20} + k^2\chi_{22})\varphi^5 + \frac{1}{7}(\chi_{30} + k^2\chi_{32})\varphi^7 +$$

$$\frac{1}{9}(\chi_{40} + k^2\chi_{42})\varphi^9 + \frac{1}{2}k^2\chi_{52}\sin 2\varphi + k^2\chi_{62}\left[\frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{2}\varphi\cos 2\varphi\right] +$$

$$+ k^2\chi_{72}\left[\frac{1}{2}\varphi\cos 2\varphi + \left(\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{4}\right)\sin 2\varphi\right] + k^2\chi_{82}\left[\left(\frac{1}{4}3\varphi^2 - \frac{3}{8}\right)\sin 2\varphi +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{4}\varphi - \frac{1}{2}\varphi^3\right)\cos 2\varphi\right] + k^2\chi_{92}\left[\left(\varphi^3 - \frac{3}{2}\varphi\right)\cos 2\varphi + \left(\frac{1}{2}\varphi^4 - \frac{3}{2}\varphi^2 + \frac{3}{4}\right)\sin 2\varphi\right] +$$

$$+ k^2\chi_{102}\left[-\frac{1}{2}\varphi^5\cos 2\varphi + \frac{5}{4}\varphi^4\sin 2\varphi - \left(\frac{15}{4}\varphi^2 - \frac{15}{8}\right)\sin 2\varphi - \left(\frac{15}{4}\varphi - \frac{5}{2}\varphi^3\right)\cos 2\varphi\right] +$$

$$+ k^2\chi_{112}\left[\frac{1}{2}\varphi^6\sin 2\varphi + \frac{3}{2}\varphi^5\cos 2\varphi - \frac{15}{2}\left(\varphi^3 - \frac{3}{2}\varphi\right)\cos 2\varphi - \frac{15}{4}(\varphi^4 - 3\varphi^2 + 3)\sin 2\varphi\right] +$$

$$+ k^2\chi_{132}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\varphi^8\sin 2\varphi + 2\varphi^7\cos 2\varphi - 7\varphi^6\sin 2\varphi - 21\varphi^5\cos 2\varphi - \\ -105\left(\varphi^3 - \frac{3}{2}\varphi\right)\cos 2\varphi - \frac{105}{2}(\varphi^4 - 3\varphi^2 + 3)\sin 2\varphi\end{array}\right] +$$

$$+ k^2\chi_{122}\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\varphi^7\cos 2\varphi + \frac{7}{4}\varphi^6\sin 2\varphi + \frac{21}{4}\varphi^5\cos 2\varphi - \frac{105}{8}\varphi^4\sin 2\varphi + \frac{21}{4}\left(\frac{15}{2}\varphi^2 - \frac{15}{4}\right)\sin 2\varphi + \\ + \frac{105}{8}\left(\frac{3}{2}\varphi - \varphi^3\right)\cos 2\varphi\end{array}\right].$$

Приведем подобные

$$\vartheta = (\nu_{00} + k^2\nu_{02})\varphi + (\nu_{10} + k^2\nu_{12})\varphi^3 + (\nu_{20} + k^2\nu_{22})\varphi^5 + (\nu_{30} + k^2\nu_{32})\varphi^7 +$$

$$+ (\nu_{40} + k^2\nu_{42})\varphi^9 + k^2\nu_{52}\sin 2\varphi + k^2\nu_{62}\varphi\cos 2\varphi + k^2\nu_{72}\varphi^2\sin 2\varphi + k^2\nu_{82}\varphi^3\cos 2\varphi +$$

$$+ k^2\nu_{92}\varphi^4\sin 2\varphi + k^2\nu_{102}\varphi^5\cos 2\varphi + k^2\nu_{112}\varphi^6\sin 2\varphi + k^2\nu_{122}\varphi^7\cos 2\varphi + k^2\nu_{132}\varphi^8\sin 2\varphi\,, \qquad (15)$$

где

$$\nu_{00}=\chi_{00},\ \nu_{02}=\chi_{02},\ \nu_{10}=\frac{1}{3}\chi_{10},\ \nu_{12}=\frac{1}{3}\chi_{12},\ \nu_{20}=\frac{1}{5}\chi_{20},\ \nu_{22}=\frac{1}{5}\chi_{22},$$

$$\nu_{30}=\frac{1}{7}\chi_{30},\ \nu_{32}=\frac{1}{7}\chi_{32},\ \nu_{40}=\frac{1}{9}\chi_{40},\ \nu_{42}=\frac{1}{9}\chi_{42},$$

$$\nu_{52}=\frac{1}{2}\chi_{52}+\frac{1}{4}\chi_{62}-\frac{1}{4}\chi_{72}-\frac{3}{8}\chi_{82}+\frac{3}{4}\chi_{92}+\frac{15}{8}\chi_{102}-\frac{45}{4}\chi_{112}-\frac{315}{2}\chi_{132}-\frac{315}{16}\chi_{122},$$

$$\nu_{62}=-\frac{1}{2}\chi_{62}+\frac{1}{2}\chi_{72}+\frac{3}{4}\chi_{82}-\frac{3}{2}\chi_{92}-\frac{15}{4}\chi_{102}+\frac{45}{4}\chi_{112}+\frac{315}{2}\chi_{132}+\frac{315}{16}\chi_{122},$$

$$\nu_{72}=\frac{1}{2}\chi_{72}+\frac{3}{4}\chi_{82}-\frac{3}{2}\chi_{92}-\frac{15}{4}\chi_{102}+\frac{45}{4}\chi_{112}+\frac{315}{2}\chi_{132}+\frac{315}{8}\chi_{122},$$

$$\nu_{82}=-\frac{1}{2}\chi_{82}+\chi_{92}+\frac{5}{2}\chi_{102}-\frac{15}{2}\chi_{112}-105\chi_{132}-\frac{105}{8}\chi_{122},$$

$$\nu_{92}=\frac{1}{2}\chi_{92}+\frac{5}{4}\chi_{102}-\frac{15}{4}\chi_{112}-\frac{105}{2}\chi_{132}-\frac{105}{8}\chi_{122},\ \nu_{102}=-\frac{1}{2}\chi_{102}+\frac{3}{2}\chi_{112}-21\chi_{132}+\frac{21}{4}\chi_{122},$$

$$\nu_{112}=\frac{1}{2}\chi_{112}-7\chi_{132}+\frac{7}{4}\chi_{122},\ \nu_{122}=2\chi_{132}-\frac{1}{2}\chi_{122},\ \nu_{132}=\frac{1}{2}\chi_{132}.$$

Таким образом, на интервале $\alpha_4 < w < \alpha_3$ получены полярные координаты близкого ИСЗ выражениями (12) и (15) в случае нестационарного поля тяготения Земли для эллиптического типа движения с точностью $O(k^2)$, где k – модуль эллиптического интеграла 1-го рода. Полярные координаты содержат как вековые, так и смешанные члены. Промежуточная переменная φ на интервале $\alpha_4 < w < \alpha_3$ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, поэтому можно утверждать, что нестационарность поля тяготения вносит свой вклад в виде секулярных членов в полярных координатах.

Резюме

$\alpha_4 < w < \alpha_3$ интервалында стационарлық емес өріс жағдайында $O(k^2)$ дәлдіктегі Жер тартылысының эллиптиктік түрінің қозғалысы үшін ЖЖС полярлық координаталары табылған. Мұнда k – эллиптик интеграл модулінің 1-ші түрі. Полярлық координаталарда ғасырлық және аралас мүшелер бар.

Summary

On the interval $\alpha_4 < w < \alpha_3$ the polar coordinates in case of close AES in nonstationary terrestrial gravitational field for elliptical type of motion with accuracy $O(k^2)$, where k – a module of elliptic integral of the 1st-kind are received. Polar coordinates contains both the secular, and the mixed members.

[1]*Институт космических исследований им. У. М. Султангазина, АО «НЦКИТ», г. Алматы;*

[2]*Академический инновационный университет, г. Шымкент;*

[3]*Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент*

Поступила 29.04.2011г.