М. А. БЕКТЕМЕСОВ, Д. Б. НУРСЕИТОВ, А. Н. АЛИМОВА

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ ЛАНДВЕБЕРА

Работа посвящена исследованию задачи Дирихле для волнового уравнения в прямоугольной области. Задача Дирихле для гиперболического уравнения в круге исследована в работах В. П. Бурского [1]. Обзор некоторых результатов в исследовании краевых задач для гиперболических уравнений приведен в работах Б. И. Пташникова [2]. Рассматривается классически некорректная задача Дирихле для волнового уравнения в двухмерном пространстве [3-5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного волнового уравнения:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \ x \in (0,\pi), \ y \in (0,\pi), \ t \in (0,T), \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \ y \in (0,\pi), \ t \in (0,T), \quad (2)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \ x \in (0,\pi), \ t \in (0,T), \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = 0, \ x \in (0,\pi), \ y \in (0,\pi), \quad (4)$$

$$u|_{t=T} = f(x,y), \ x \in (0,\pi), \ y \in (0,\pi). \quad (5)$$

Эту задачу мы сформулируем как обратную задачу по отношению к следующей прямой задаче:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \ x \in (0,\pi), \ y \in (0,\pi), \ t \in (0,T), \quad (6)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \ y \in (0,\pi), \ t \in (0,T), \quad (7)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \ x \in (0,\pi), \ t \in (0,T), \quad (8)$$

$$u|_{t=0} = 0, \ x \in (0,\pi), \ y \in (0,\pi), \quad (9)$$

$$u_t|_{t=0} = q(x,y), \ x \in (0,\pi), \ y \in (0,\pi). \quad (10)$$

В обратной задаче (1)–(5) требуется найти $q(x,y)$ по дополнительной информации относительно решения прямой задачи

$$u(x,y,T) = f(x,y), \ x \in (0,\pi), \ y \in (0,\pi). \quad (11)$$

2. Метод решения. Для решения прямой задачи используем метод Фурье. Полагаем, что функции $u(x,y,t)$ и $q(x,t)$ представимы в виде

$$q(x,t) = \sum_{k=1}^{n} q_{(k)}(x) \sin ky$$

где

$$q_{(k)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(x,y) \sin ky dy$$

ищем решение (6)–(10) в виде

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}u_{(k)}(x,t)\sin ky.$$

Тогда получим

$$u_{(k)t}=u_{(k)xx}-k^2u_{(k)},\ x\in(0,\pi),\ t\in(0,T),\quad(12)$$

$$u_{(k)}(0,t)=u_{(k)}(\pi,t)=0,\ t\in(0,T),\quad(13)$$

$$u_{(k)}(x,0)=0,\ x\in(0,\pi),\quad(14)$$

$$u_{(k)t}(x,0)=q_{(k)}(x),\ x\in(0,\pi),\quad(15)$$

где по заданной функции $q_{(k)}(x)$ нужно определить $u_{(k)}(x,t)$.

Сформулируем обратную задачу к прямой (12)–(15): определить функцию $q_{(k)}(x)$ по дополнительной информации

$$u_{(k)}(x,T)=f_{(k)}(t),\quad(16)$$

где $u_{(k)}(x,T)$ – решение прямой задачи (12)–(15) при $t=T$.

Таким образом, обратная задача (12)–(16) имеет следующий операторный вид

$$A_{(k)}q_{(k)}=f_{(k)}.$$

При каждом k мы решаем обратную задачу (12)–(16) минимизацией целевого функционала

$$J_{(k)}(q)=\langle A_{(k)}q_{(k)}-f_{(k)},A_{(k)}q_{(k)}-f_{(k)}\rangle,\quad(17)$$

минимизировать который будем методом итераций Ландвебера

$$q_{(k)n+1}(x)=q_{(k)n}(x)-\alpha J'_{(k)}q_{(k)n}\quad(18)$$

при $\alpha\in\left(0,\|A\|^{-2}\right)$.

3. Вычисление градиента функционала $J_{(k)}(q)$. Рассмотрим функционал (17) в следующем виде

$$J_{(k)}(q)=\int_0^{\pi}[u_{(k)}(x,T;q)-f_{(k)}(x)]^2dx.\quad(19)$$

Найдем приращение функционала

$$J_{(k)}(q+\delta q)-J_{(k)}(q)=$$

$$=\int_0^{\pi}\{[u_{(k)}(x,T;q+\delta q)-f_{(k)}(x)]^2-$$

$$-[u_{(k)}(x,T;q)-f_{(k)}(x)]^2\}dx.\quad(20)$$

Введем замену

$$u_{(k)}(x,T;q+\delta q)=\tilde{u}_{(k)},\quad(21)$$

$$u_{(k)}(x,T;q)=u_{(k)},\quad(22)$$

$$\delta u_{(k)}(x,T;\delta q)=\tilde{u}_{(k)}-u_{(k)},\quad(23)$$

$$\tilde{u}_{(k)}=\delta u_{(k)}+u_{(k)}.\quad(24)$$

Раскроем скобки в (20) и, используя (21)–(22), получим

$$=\int_0^{\pi}(\tilde{u}_{(k)}^2-2\tilde{u}_{(k)}f_{(k)}(x)+f_{(k)}(x)^2)dx-$$

$$-\int_0^{\pi}(u_{(k)}^2-2u_{(k)}f_{(k)}(x)+f_{(k)}(x)^2)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\tilde{u}_{(k)}^2dx-2\int_0^{\pi}\tilde{u}_{(k)}f_{(k)}(x)dx-\int_0^{\pi}u_{(k)}^2dx+2\int_0^{\pi}u_{(k)}f_{(k)}(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\tilde{u}_{(k)}^2-u_{(k)}^2)dx-2\int_0^{\pi}(\tilde{u}_{(k)}-u_{(k)})f_{(k)}(x)dx,$$

используя (23),(24), получим

$$=\int_0^{\pi}((\tilde{u}_{(k)}-u_{(k)})(\tilde{u}_{(k)}+u_{(k)}))dx-2\int_0^{\pi}\delta u_{(k)}f_{(k)}(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\delta u_{(k)}(\delta u_{(k)}+u_{(k)}+u_{(k)}))dx-2\int_0^{\pi}\delta u_{(k)}f_{(k)}(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\delta u_{(k)}^2dx+2\int_0^{\pi}u_{(k)}\delta u_{(k)}dx-2\int_0^{\pi}\delta u_{(k)}f_{(k)}(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\delta u_{(k)}^2dx+2\int_0^{\pi}(u_{(k)}-f_{(k)}(x))\delta u_{(k)}dx.$$

Сформулируем возмущенную задачу

$$\tilde{u}_{(k)t}=\tilde{u}_{(k)xx}-k^2\tilde{u}_{(k)},\ x\in(0,\pi),\ t\in(0,T),\quad(25)$$

$$\tilde{u}_{(k)}(0,t)=\tilde{u}_{(k)}(\pi,t)=0,\ t\in(0,T),\quad(26)$$

$$\tilde{u}_{(k)}(x,0)=0,\ x\in(0,\pi),\quad(27)$$

$$\tilde{u}_{(k)t}(x,0)=q_{(k)}(x)+\delta q_{(k)}(x),\ x\in(0,\pi),\quad(28)$$

Из задачи (25)–(28) вычтем задачу (12)–(15) и получим задачу на $\delta u_{(k)}(x)$

$$\delta u_{(k)t}=\delta u_{(k)xx}-k^2\delta u_{(k)},\ x\in(0,\pi),\ t\in(0,T),\quad(29)$$

$$\delta u_{(k)}(0,t)=\delta u_{(k)}(\pi,t)=0,\ t\in(0,T),\quad(30)$$

$$\delta u_{(k)}(x,0)=0,\ x\in(0,\pi),\quad(31)$$

$$\delta u_{(k)t}(x,0)=\delta q_{(k)}(x),\ x\in(0,\pi),\quad(32)$$

Рассмотрим тождественно равное нулю выражение, полученное из (29)

$$0 = \int_0^T\int_0^\pi (\delta u_{(k)tt} - \delta u_{(k)xx} + k^2 \delta u_{(k)})\psi_{(k)} dxdt$$

$$= \int_0^T\int_0^\pi \delta u_{(k)tt}\psi_{(k)} dxdt - \int_0^T\int_0^\pi \delta u_{(k)xx}\psi_{(k)} dxdt +$$

$$+ \int_0^T\int_0^\pi k^2 \delta u_{(k)}\psi_{(k)} dxdt,$$

проинтегрируем по частям выражение

$$= |_0^T \int_0^\pi \delta u_{(k)t}\psi_{(k)} dx - \int_0^\pi\int_0^T \delta u_{(k)t}\psi_{(k)t} dxdt - |_0^\pi \int_0^T \delta u_{(k)x}\psi_{(k)} dt +$$

$$+ \int_0^\pi\int_0^T \delta u_{(k)x}\psi_{(k)x} dxdt + \int_0^T\int_0^\pi k^2 \delta u_{(k)}\psi_{(k)} dxdt,$$

используем повторное интегрирование по частям

$$= |_0^T \int_0^\pi \delta u_{(k)t}\psi_{(k)} dx - |_0^T \int_0^\pi \delta u_{(k)}\psi_{(k)t} dx +$$

$$+ \int_0^\pi\int_0^T \delta u_{(k)}\psi_{(k)tt} dxdt - |_0^\pi \int_0^T \delta u_{(k)x}\psi_{(k)} dt +$$

$$+ |_0^\pi \int_0^T \delta u_{(k)}\psi_{(k)x} dt - \int_0^\pi\int_0^T \delta u_{(k)}\psi_{(k)xx} dxdt +$$

$$+ \int_0^T\int_0^\pi k^2 \delta u_{(k)}\psi_{(k)} dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_0^\pi (\psi_{(k)tt} - \psi_{(k)xx} + k^2\psi_{(k)})\delta u_{(k)} dxdt +$$

$$+ \int_0^\pi \delta u_{(k)t}(x,T)\psi_{(k)}(x,T) dx -$$

$$- \int_0^\pi \delta u_{(k)t}(x,0)\psi_{(k)}(x,0) dx - \int_0^\pi \delta u_{(k)}(x,T)\psi_{(k)t}(x,T) dx +$$

$$+ \int_0^\pi \delta u_{(k)}(x,0)\psi_{(k)t}(x,0) dx - \int_0^T \delta u_{(k)x}(\pi,t)\psi_{(k)}(\pi,t) dt +$$

$$+ \int_0^T \delta u_{(k)x}(0,t)\psi_{(k)}(0,t) dt + \int_0^T \delta u_{(k)}(\pi,t)\psi_{(k)x}(\pi,t) dt -$$

$$- \int_0^T \delta u_{(k)}(0,t)\psi_{(k)x}(0,t) dt.$$

Используя (30) и (31), получаем

$$= \int_0^T\int_0^\pi (\psi_{(k)tt} - \psi_{(k)xx} + k^2\psi_{(k)})\delta u_{(k)} dxdt +$$

$$+ \int_0^\pi \delta u_{(k)t}(x,T)\psi_{(k)}(x,T) dx -$$

$$- \int_0^\pi \delta u_{(k)t}(x,0)\psi_{(k)}(x,0) dx - \int_0^\pi \delta u_{(k)}(x,T)\psi_{(k)t}(x,T) dx -$$

$$- \int_0^T \delta u_{(k)x}(\pi,t)\psi_{(k)}(\pi,t) dt + \int_0^T \delta u_{(k)x}(0,t)\psi_{(k)}(0,t) dt.$$

Откуда вытекает постановка сопряженной задачи

$$\psi_{(k)tt} = \psi_{(k)xx} - k^2\psi_{(k)}, \ x \in (0,\pi), \ t \in (0,T), \quad (33)$$

$$\psi_{(k)}(0,t) = \psi_{(k)}(\pi,t) = 0, \ t \in (0,T), \quad (34)$$

$$\psi_{(k)}(x,T) = 0, \quad x \in (0,\pi), \ x \in (0,\pi), \quad (35)$$

$$\psi_{(k)t}(x,T) = 2[u_{(k)}(x,T) - f_{(k)}(x)], \ x \in (0,\pi), \quad (36)$$

получаем выражение

$$0 \equiv \int_0^\pi \delta u_{(k)t}(x,0)\psi_{(k)}(x,0) dx + \int_0^\pi \delta u_{(k)}(x,T)\psi_{(k)t}(x,T) dx. \quad (37)$$

Откуда, учитывая (32), из (37) получаем выражение для градиента функционала

$$J'q_{(k)} = \psi_{(k)}(x,0). \quad (38)$$

где $\psi_{(k)}(x,t)$ есть решение сопряженной задачи (33)–(36)

$$q_{(k)n+1}(x) = q_{(k)n}(x) - \alpha J'_{(k)} q_{(k)n}$$

при $\alpha \in \left(0, \|A\|^{-2}\right)$.

В подтверждение этому были получены численные результаты и графики для тестовых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002.

2. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1984.

3. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

5. *Тихонов А.Н., Самарский А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

Резюме

Екі өлшемді толқындық теңдеуіне арналған қисынды емес Дирихле есебі қарастырылады. Дирихле есебінің шешімі кері есептің шешіміне алып келеді. Фурье түрлендіруінің көмегімен екі өлшемді есепті біралшемдіге ауыстыру әдісі ұсынылады. Кері есепті шешу үшін Ландвебер итерация әдісі қолданылады.

Summary

We consider the ill-posed Dirichlet problem for a two-dimensional wave equation. Dirichlet problem results in solving the inverse problem. A method of transition from two-dimensional problem to one dimensional problem is proposed using the Fourier transformation. To solve the inverse problem the Landweber iteration method is used.

КазНПУ им. Абая,
г. Алматы

Поступила 19.04.2011г.