МАТЕМАТИКА

УДК 539.3

Г.Е. БЕРИКХАНОВА

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КРУГЕ

(Представлено академиком Т.Ш. Кальменовым)

В данной работе изучаются свойства функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге. Рассматривается производная, дважды дифференцируемая функция в круге, которая на внешней границе вместе с производной по нормали равны нулю. Вводится новая функция, у которой билаплас равен билапласу искомой функции, но не обязательно удовлетворяющая граничным условиям искомой функции. Далее в работе доказываются три важных теорем, утверждающие свойства функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге.

Пусть *h(x, y)* произвольная дважды дифференцируемая в круге Ω функция. Введем новую функцию по формуле

$$I(x,y)=\iint\limits_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)\Delta^2_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

где $\Delta_{\xi,\eta}=\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ – оператор Лапласа по переменным ξ,η.

Ясно, что функция *I(x, y)* обладает свойствами:

$$\Delta^2_{x,y}I(x,y)=\Delta^2_{x,y}h(x,y),\qquad (x,y)\in\Omega \quad (1)$$

$$I(x,y)\big|_{\partial\Omega}=0 \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial I(x,y)}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega}=0. \quad (3)$$

С другой стороны, вспоминая вторую формулу Грина

$$\iint\limits_{\Omega}\Delta^2 uv\,dxdy-\iint\limits_{\Omega}u\Delta^2 v\,dxdy=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\Delta uv-\Delta u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\vec{n}}u\Delta v-u\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\Delta v\right)\right]ds,$$

функцию *I (x, y)* можно переписать в виде

$$I(x,y)=\iint\limits_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)\Delta^2_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}h(\xi,\eta)\Delta^2_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG(x,y,\xi,\eta)-\right.\right.$$

$$\left.-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-\right.$$

$$\left.\left.-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right)\right]ds_{\xi,\eta}, \quad (4)$$

где $\vec{n}_{\xi,\eta}$ – внешняя нормаль к окружности $\partial\Omega$ в точке (ξ,η).

В силу симметрии функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ относительно пар (x,y) и (ξ,η) имеем равенство:

$$\Delta^2_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)=\delta_{\Omega}((x,y),(\xi,\eta)), \quad (5)$$

где $\delta_{\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$ – дельта функция Дирака в области Ω.[1]

Из (4) и (5) следует равенство

$$I(x,y)=h(x,y)+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG(x,y,\xi,\eta)-\right.\right.$$

$$\left.-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-\right.$$

$$\left.\left.-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\vec{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right)\right]ds_{\xi,\eta}.$$

Поскольку $G(x,y,\xi,\eta)\big|_{(x,y)\in\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega}=0$, и $\left.\dfrac{\partial}{\partial\vec{n}_{x,y}}G(x,y,\xi,\eta)\right|_{(x,y)\in\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega}=0$ последнее равенство переписываем в виде

$$I(x,y)=h(x,y)+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-\right.$$

$$\left.-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}. \qquad (6)$$

Удобно вести обозначение $M(x, y) = h(x, y) - I(x,y)$.

Подставим правую часть (6) в соотношение (1). В результате для любой гладкой функции $h(x, y)$ получим соотношение

$$\Delta^2_{x,y}M(x,y)=0. \qquad (7)$$

Теперь используем граничные условия (2), (3). Подставим (6) в граничные условия (2), (3), тогда для произвольной гладкой функции $h(x, y)$ имеем граничные соотношения

$$\begin{cases} h|_{\partial\Omega}+M|_{\partial\Omega}=0 \\ \left.\dfrac{\partial h}{\partial\bar{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega}+\left.\dfrac{\partial M}{\partial\bar{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \qquad (8)$$

В силу произвольности $h(x, y)$ и независимости граничных значений $\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)$, $h(\xi,\eta)$ при $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$ убеждаемся в справедливости следующих свойств функции Грина:

$$\left.\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega}=\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta)),$$

$$\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega}=0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{x,y}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega}=-\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta)),$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{x,y}}\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega}=0, \qquad (9)$$

где $\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$ – дельта функция Дирака на границе $\partial\Omega$.

По-видимому, граничные соотношения (9) для функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ известны, но авторы не смогли найти точные координаты для ссылок. Поэтому сформулируем необходимое для дальнейшего результата в виде отдельного утверждения.

Теорема 1. Функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге обладает свойствами:

1) $G(P,Q)=G(Q,P)$, $\forall Q,P\in\Omega$,

2) $G(P,Q)\geq 0$, $\forall Q,P\in\Omega$,

3) $\Delta^2_{x,y}G(Q,P)=\delta_\Omega(P,Q)$, $\forall Q,P\in\Omega$,

4) $G(P,Q)=0$, $P\in\partial\Omega$, $Q\in\Omega$,

5) $\frac{\partial}{\partial\bar{n}_P}G(P,Q)=0$, $P\in\partial\Omega$, $Q\in\Omega$,

6) при $P,Q\in\partial\Omega$ справедливо соотношение (9).

Теперь образуем новую функцию

$$W(x,y)=\iint\limits_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta+h(x,y)-I(x,y), \qquad (10)$$

где $h(x, y)$ – произвольная достаточно гладкая функция.

$I(x, y)$ – определяется по формуле (6).

Теорема 2. Функция $W(x, y)$ введенная по формулам (10) и (6) является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta^2W(x,y)=f(x,y), & (x,y)\in\Omega, \\ W(x,y)|_{\partial\Omega}=h(x,y)|_{\partial\Omega}, \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial\bar{n}_{x,y}}W(x,y)\right|_{\partial\Omega}=\left.\dfrac{\partial}{\partial\bar{n}_{x,y}}h(x,y)\right|_{\partial\Omega}, \end{cases} \qquad (11)$$

где $h(x, y)$ – произвольная достаточно гладкая функция.

Причем решение задачи (11) единственно, то есть решение задачи (11) зависит только от граничных значений $h(x,y)|_{\partial\Omega}$ и $\left.\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{x,y}}h(x,y)\right|_{\partial\Omega}$, но не зависит от $h(x, y)$, когда $(x,y)\in\Omega$.

Доказательство теоремы 2.

Заметим, что из соотношения (6) представление (10) можно переписать в виде

$$W(x,y)=\iint\limits_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-\right.$$

$$\left.-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}.$$

Проверим для $W(x, y)$ первое соотношение из (11). Справедливость равенства (11) следует из того, что верны (7) и (5). Проверим для $W(x, y)$ второе соотношение из (11). Пусть $(x,y)\in\partial\Omega$.

Тогда из равенства 4) теоремы 1 и соотношений (9) следует требуемое граничное соотношение из (11). Третье соотношение из (11) следует из 5) теоремы 1 и соотношений (9). Единственность задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре известна. Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Теперь покажем, как, используя теорему 2, можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для бигармонического уравнения в шаре.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x, y)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x, y)$, то есть пусть существует непрерывный оператор O, отображающий $f(x, y)$ в $h(x, y)$. Напомним $h(x, y)$ – гладкая функция. Итак, пусть $h = O(f)$.

Тогда задача (11) примет вид

$$\Delta^2 W(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{12}$$

$$\begin{cases} W(x,y)\big|_{\partial\Omega} - O\left(\Delta^2 W\right)\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} W(x,y)\Big|_{\partial\Omega} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} O\left(\Delta^2 W\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Условия (13) накладываемые на функцию $W(x, y)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (12) при любой правой части $f(x, y)$ имела единственное решение. Таким образом, задача (12)-(13) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми «краевыми» условиями вида (13). Слово «краевые» пишем в кавычках из-за того, что в общем случае эти условия не являются граничными.

Итак, справедлива

Теорема 3. Для любого непрерывного оператора O, отображающего пространство $\{f\}$ в множество гладких функции $\{h\}$ задачи (12)-(13), имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях f.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Изд. Наука. 1976. 296 с.

Резюме

Дөңгелектегі бигармоникалық теңдеу үшін Дирихле есебіндегі Грин функциясының қасиеттері зерттелген. Дөңгелекте екі рет дифференциалданатын, сыртқы шекарада нормалі бойынша туындымен қоса нөльге тең болатын функция қарастырылады. Ізделінді функцияның шекаралық шарттарын қанағаттандыруы міндетті емес, бірақ билапласы ізделінді функцияның билапласына тең болатын жаңа функция енгізіледі. Сонымен бұл жұмыста дөңгелектегі бигармоникалық теңдеу үшін Дирихле есебіндегі Грин функциясының қасиетін анықтайтын үш теорема дәлелденеді.

Summary

In this work the Green functions' properties of the Dirichlet problem for the biharmonic equation in a circle have been studied. The derivative twice differentiable function in a circle has been considered with the derivative, which are equal to zero by normal at the exterior boundary. A new function has been entered, the bilaplas of which is equal to desired function's bilaplas, but not obligatory meets the requirements of the desired function's boundary conditions. Further in this work the three important theorems have been proved stating the Green functions' properties of the Dirichlet problem for the biharmonic equation in a circle.

Семипалатинский государственный педагогический институт

Поступила 16.11.09 г.