УДК 517.5

М. Е. БЕРИКХАНОВА, К. Е. ШЕРНИЯЗОВ

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОРЯДКИ ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ПО ЗАДАННОМУ ЧИСЛУ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

Рассмотрена задача дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге по коэффициентам Фурье граничного условия. Найден оптимальный порядок погрешности дискретизации и построен соответствующий оптимальный оператор дискретизации.

Ключевые слова: дискретизация решений дифференциального уравнения, коэффициенты Фурье, задача Дирихле, уравнение Лапласа, приближенное восстановление.

Приведем постановку общей задачи (в редакции из [1]) применительно к рассматриваемой в данной работе конкретизации.

Пусть $u(\alpha,\theta)\equiv u(\alpha,\theta;f)$ есть решение уравнения Лапласа в полярных координатах (см. [2], стр. 236)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(\alpha,\theta)\,|_{\alpha=R}=f(\theta), \qquad (2)$$

где f некоторая 2π-периодическая функция, обеспечивающая корректность задачи (1)-(2), более того, принадлежность решения $u(\alpha,\theta;f)$ заданному нормированному пространству L^V.

Здесь рассматривается задача дискретизации решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по тригонометрическим коэффициентам Фурье-Лебега граничного условия f из классов Соболева W_q^r $(rq>1)$ и Никольского-Бесова $B^r_{q,æ}$ $(1\le q,\ æ\le\infty,\ rq>1)$.

Задача заключается в следующем: для каждого заданного N выбрат индексы $m_k\in Z$; $(k=1,2,\ldots,N)$ и функцию

$$\varphi_N(z_1,\ldots,z_N,\alpha,\theta):C^N\times[0,R]\times[0,2\pi]\to C$$

такими, чтобы соответствующие погрешности

$$\sup_{f\in F}\sup_{\alpha\in[0,R]}\times$$

$$\times\left\| u(\alpha,\cdot;f)-\varphi_N(\hat f(m_1),\ldots,\hat f(m_N),\alpha,\cdot)\right\|_{L^V}$$

были не улучшаемыми в смысле порядка относительно N.

Из известных результатов по данной тематике отметим следующие. К.Ю. Осипенко (см. [3]) в одномерном случае для классов Харди-Соболева периодических функций с равномерно ограниченными производными получено точное решение задачи оптимального восстановления значения Tf по первым $N=2n-1$ тригонометрическим коэффициентам Фурье и по значениям в заданном конечном множестве точек на периоде. В работе предложен общий подход к построению оптимальных методов восстановления линейных функционалов по известному решению двойственной экстремальной задачи, основанной на некоторой параметризации этого решения.

Такого же рода точные результаты для классов аналитических функций получены в статьях Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко [4], K. Yu. Osipenko and K. Wilderotter [5], Так же известны результаты Н. Темиргалиева [1], Ш. У. Ажгалиева [6] по восстановлению уравнения теплопроводности.

В данной работе в качестве класса F рассматривается класс Соболева $W_q^r(0,2\pi)$ (r – целое

положительное число), определяемый следующим образом (см. [7]):

$$f(\theta) \in W_q^r(0,2\pi) \overset{def}{\Leftrightarrow} \|f\|_{W_q^r(0,2\pi)} =$$

$$= \|f\|_{L_q(0,2\pi)} + \left\|f^{(r)}\right\|_{L_q(0,2\pi)} \le 1$$

$$(r = 1,2,\ldots),$$

и класс Бесова $B_{q,æ}^r(0,2\pi)$ (см. [7]):

$$f(\theta) \in B_{q,æ}^r(0,2\pi) \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \left\| \left\{ 2^{\tau r} \left\| \sum_{m \in \rho(\tau)} \hat{f}(m) \cdot e^{im\cdot} \right\|_{L_q} \right\}_{\tau=1}^{\infty} \right\|_{æ} \le 1,$$

где $(1 \le q,\ æ \le \infty,\ r > 0)$, $\overline{m} = \max\{1; |m|\}$, $\rho(\tau) = \{m \in Z: 2^{\tau-1} \le \overline{m} < 2^{\tau}\}$, $\|f\|_{L_q}$ – лебегова норма со степенью суммируемости q 2π-периодической функции f,

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cdot e^{-im\theta}\, d\theta$$

– тригонометрические коэффициенты Фурье функции f, а $\left\|\{a_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}\right\|_{æ}$ есть норма числовой последовательности $a = \{a_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}$, определяемая как

$$\left\|\{a_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}\right\|_{æ} =$$

$$= \begin{cases} \left(\sum_{\tau=1}^{\infty} |a_\tau|^{æ} \right)^{\frac{1}{æ}} & \text{при} \quad 1 \le æ < \infty, \\ \sup_{\tau} |a_\tau| & \text{при} \quad æ = \infty. \end{cases}$$

Через $c(\ldots)$ будем обозначать некоторые положительные величины, разные, вообще говоря, в различных формулах и зависящие лишь от указанных в скобках параметров. При положительном A и любом B записи $B = O_{\alpha,\beta,\ldots}(A)$, $B \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} A$ будут означать $|B| \le c(\alpha,\beta,\ldots)A$. При положительных A и B запись $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} B$ означает $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} B \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} A$.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть даны числа* $2 \le q \le \nu \le +\infty$.

а) Пусть $r > \dfrac{1}{q}$ *– целое положительное число. Тогда имеет место двусторонняя оценка*

$$\inf_{m_1 \in Z} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in W_q^r} \sup_{0 \le \alpha \le R} \times$$

$$\times \left\| u(\alpha,\cdot;f) - \varphi_N(\hat{f}(m_1),\ldots,\hat{f}(m_N),\alpha,\cdot) \right\|_{L^\nu[0,2\pi]} \underset{r,q,\nu}{\succ\prec}$$

$$\underset{r,q,\nu}{\succ\prec} \frac{1}{N^{r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}}.$$

б) Пусть $1 \le æ \le \infty$ и $r > \dfrac{1}{q}$. *Тогда имеет место двусторонняя оценка*

$$\inf_{m_1 \in Z} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in B_{q,æ}^r} \sup_{0 \le \alpha \le R} \times$$

$$\times \left\| u(\alpha,\cdot;f) - \varphi_N(\hat{f}(m_1),\ldots,\hat{f}(m_N),\alpha,\cdot) \right\|_{L^\nu[0,2\pi]} \underset{r,q,æ,\nu}{\succ\prec}$$

$$\underset{r,q,æ,\nu}{\succ\prec} \frac{1}{N^{r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}}.$$

При этом в каждом из случаев а) и б) оценку сверху реализует оператор :

$$\left(T_N^{(5)} f\right)(\alpha,\theta) = \varphi_N(\hat{f}(m_1),\ldots,\hat{f}(m_N);\alpha,\theta) \equiv$$

$$\equiv V_{2^n}(\alpha,\theta;f) =$$

$$= \sum_{m=-2^{n-2}}^{2^{n-2}} \left(\frac{\alpha}{R}\right)^{|m|} \hat{f}(m) \cdot \hat{V}_{2^n}(m) \cdot e^{im\theta}.$$

Для доказательства этой теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма А ([7, с. 281]). *Пусть даны целое неотрицательное число* l, *положительное число* r, $1 \le q$, $æ \le \infty$, *целое положительное* ρ *и пусть* $T_\rho(x)$ *является тригонометрическим*

многочленом порядка не выше ρ. *Тогда верны неравенства*

$$\|T_\rho\|_{W_q^r} << \rho^r \|T_\rho\|_{L^q}, \quad \|T_\rho\|_{B_{q,\infty}^r} << \rho^r \|T_\rho\|_{L^q}.$$

Отметим, что константы в этих неравенствах не зависят от ρ.

Через $|E|$ – обозначим количество элементов конечного множества E.

Лемма B (см.[6]). *Для каждого целого положительного N выполнены следующие свойства: для любой ортогональной на $[0,1]$ системы функций $\psi \equiv \{\psi_k\}_{k=1}^{N'}$ и для любого множества $E \equiv \{m^{(1)};\ldots;m^{(N')}\} \subset Z$ таких, что $N' = |E| \geq 3N$ и $|E| \succ\prec N$, и для произвольных линейных функционалов $l_1,\ldots,l_N$, определенных, по крайней мере, на множестве всех многочленов по системе ψ и на множестве всех тригонометрических многочленов со спектром в E, найдутся комплексные числа $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{N'}|c_k| \geq N$, $\sum_{k=1}^{N'}|c_k|^2 = N$ и такие, что для функции*

$$\chi(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i m^{(k)} \cdot x} \quad \text{и} \quad k(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k \psi_k(x)$$

справедливы соотношения

$$l_1(\chi) = \ldots = l_N(\chi) = l_1(k) = \ldots = l_N(k) = 0,$$

$$\|\chi\|_{L^\infty} \geq N, \quad \|\chi\|_{L^2} = N^{\frac{1}{2}}. \qquad (3)$$

Доказательство теоремы. Пусть $1 \leq q \leq \infty$. Поскольку верны вложения [7, с. 230]

$$W_q^r(0,2\pi) \subset H_q^r(0,2\pi),$$

$$B_{q,1}^r(0,2\pi) \subset B_{q,\infty}^r(0,2\pi) \equiv H_q^r(0,2\pi),$$

то в обоих случаях достаточно оценку сверху получить для класса $H_q^r(0,2\pi)$, а оценку снизу в пункте б) – для класса $B_{q,1}^r(0,2\pi)$.

Оценка сверху. Пусть дано целое положительное число N и множество $I_\rho = [-\rho,\rho] \cap Z$. Без ограничения общности можно считать, что $N = \left|I_{2^n}\right| \succ\prec 2^n$. Определим линейные функционалы

$$l_1(f) = \hat{f}\left(m^{(1)}\right), \ldots, l_N(f) = \hat{f}\left(m^{(N)}\right),$$

где $\{m^{(1)},\ldots,m^{(N)}\}$ есть некоторое упорядочение множества I_{2^n}. Функцию $\varphi_N(\tau_1,\ldots,\tau_N;\alpha,\theta)$ определим таким образом, чтобы для каждой функции $g \in L^1(0,2\pi)$ было выполнено равенство

$$\varphi_N(l_1(g),\ldots,l_N(g);$$

$$\alpha,\theta) = V_{2^n}(\alpha,\theta;g) = \sum_{k=0}^{n} q_k(\alpha,\theta;g),$$

где [7, с. 295-300] $V_{2^k}(\alpha,\theta;g)$ – средние Валле-Пуссена функции $u(\alpha,\theta;f)$ порядка 2^k по переменной θ, а $q_0 = V_{2^0}$, $q_k = V_{2^k} - V_{2^{k-1}}$, $k \geq 1$.

Покажем, что если $f \in H_q^r(0,2\pi)$, то при любом $\alpha \in [0,R]$ решение $u(\alpha,\theta;f)$ уравнения (1)-(2), рассматриваемое как функция от θ, принадлежит $H_q^r(0,2\pi)$.

При $\alpha = R$ в силу (2) имеем $u(R,\theta;f) = f(\theta) \in H_q^r(0,2\pi)$. Пусть теперь $\alpha \in [0,R)$. Решение задачи (1)–(2) имеет вид

$$u(\alpha,\theta;f) = \sum_{m\in Z}\left(\frac{\alpha}{R}\right)^{|m|}\hat{f}(m)e^{im\theta}.$$

Обозначим $G(\alpha,\theta) = \sum_{m\in Z}\left(\frac{\alpha}{R}\right)^{|m|}e^{im\theta}$. Тогда

$$u(\alpha,\ \theta\ ;f) = \sum_{m\in Z}\left(\frac{\alpha}{R}\right)^{|m|}\ e^{im\theta}\hat{f}(m) =$$

$$= \sum_{m\in Z}\left(\frac{\alpha}{R}\right)^{|m|}\ e^{im\theta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)e^{-im\xi}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m\in Z}\left(\frac{\alpha}{R}\right)^{|m|}\ f(\xi)e^{-im(\theta-\xi)}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\alpha,\theta-\xi)f(\xi)d\xi.$$

Отсюда сделав замену $\theta - \xi = \zeta$, получим

$$u(\alpha,\ \theta\ ;f) = -\frac{1}{2\pi}\int_\theta^{\theta-2\pi} G(\alpha,\zeta)f(\theta-\zeta)d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\alpha,\zeta)f(\theta-\zeta)d\zeta.$$

Пусть теперь целое $k > r$. Вычислим норму k-й разности по переменной θ:

$$\left\|\Delta_h^k u(\alpha,\theta;f)\right\|_{L^q(0,2\pi)} =$$

$$= \left\|\Delta_h^k\left(\int_0^{2\pi} G(\alpha,\zeta) f(\theta-\zeta)d\zeta\right)\right\|_{L^q(0,2\pi)} =$$

$$= \left\|\int_0^{2\pi} G(\alpha,\zeta)\Delta_h^k f(\theta-\zeta)d\zeta\right\|_{L^q(0,2\pi)} =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} G(\alpha,\zeta)\Delta_h^k f(\theta-\zeta)d\zeta\right|^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, а также учитывая, что $G(\alpha,\zeta) \geq 0$ и $\int_0^{2\pi} G(\alpha,\zeta)d\zeta = 1$, получим

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|G(\alpha,\zeta)\Delta_h^k f(\theta-\zeta)\right|^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}} d\zeta \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} G(\alpha,\zeta)\left\|\Delta_h^k f(\theta-\zeta)\right\|_{L^q(0,2\pi)} d\zeta =$$

$$= \left\|\Delta_h^k f(\theta)\right\|_{L^q(0,2\pi)}.$$

В итоге, получаем (см. [7]), что $u(\alpha,\theta;f) \in H_q^r(0,2\pi)$ при любом $\alpha \in [0, R]$ причем при любом $\alpha \in [0, R]$ выполняется неравенство

$$\left\|u(\alpha,\cdot;f)\right\|_{H_q^r(0,2\pi)} \leq \left\|f\right\|_{H_q^r(0,2\pi)}.$$

Тогда

$$\left\|u-\varphi_N\right\|_{L^\nu(0,2\pi)} =$$

$$= \left\|u(\alpha,\cdot,f) - \varphi_N(\hat{f}(m_1),\ldots,\hat{f}(m_N),\alpha,\cdot)\right\|_{L^\nu(0,2\pi)} =.$$

Так как $u(\alpha,\theta,f) = \sum_{s=0}^{+\infty} q_s(\alpha,\theta;f)$ [8, с.305], имеем

$$= \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} q_k(\alpha,\theta;f)\right\|_{L^\nu(0,2\pi)} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left\|q_k(\alpha,\theta;f)\right\|_{L^\nu(0,2\pi)}.$$

Применим к q_k неравенство разных метрик [7, с.133].

$$\left\|q_k(\alpha,\cdot;f)\right\|_{L^\nu(0,2\pi)} \ll$$

$$\ll 2^{k\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}\left\|q_k(\alpha,\cdot;f)\right\|_{L^q(0,2\pi)}. \qquad (5)$$

Средние Валле-Пуссена функций из класса $H_q^r(0,2\pi)$ удовлетворяют неравенству [7, с.305]

$$\sup_{k=0,1,2,\ldots} 2^{kr}\left\|q_k(\alpha,\theta;f)\right\|_{L^q(0,2\pi)} \ll$$

$$\ll \left\|u(\alpha,\cdot;f)\right\|_{H_q^r(0,2\pi)} \ll \left\|f\right\|_{H_q^r(0,2\pi)} \leq C(q,r).$$

Отсюда,

$$\left\|q_k(\alpha,\cdot;f)\right\|_{L^q(0,2\pi)} \underset{q,r}{\ll} 2^{-kr}. \qquad (6)$$

С учетом (5) и (6) продолжим оценку (4):

$$\left\|u-\varphi_N\right\|_{L^\nu(0,2\pi)} \underset{q,r,\nu}{\ll} \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{k\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}\cdot 2^{-kr} \leq$$

$$\leq 2^{-(n+1)\left(r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)\right)} \underset{r,q,\nu}{\ll} N^{-\left(r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)\right)}.$$

Оценка сверху получена.

Оценка снизу. Пусть заданы целое положительное число N; $\{m_1,\ldots,m_N\} \subset G$ и $l_1(f) = \hat{f}(m_1), \ldots, l_N = \hat{f}(m_N)$ – фиксированные линейные функционалы. Определим целое положительное число $n = n(N)$ из условий $|I_n| \geq 2N$ и $|I_n| \succ\prec N$.

Пусть функция $\chi(x)$ определена, как в лемме B при $G = [-3N,3N] \cap Z$ и данных функционалах $l_1(f) = \hat{f}(m_1),\ldots,l_N = \hat{f}(m_N)$. Оценим нормы $\|\chi\|_{W_q^r}$ и $\|\chi\|_{B_{q,1}^r}$ при $q \geq 2$. Для этого последовательно применим к $\chi(x)$ леммы A, B и неравенства разных метрик

$$\|\chi\|_{W_q^r} \ll n^r\|\chi\|_{L^q} \ll n^r n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} N^{\frac{1}{2}} \ll N^{r+1-\frac{1}{q}},$$

$$\|\chi\|_{B_{q,1}^r} \ll n^r\|\chi\|_{L^q} \ll n^r n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} N^{\frac{1}{2}} \ll N^{r+1-\frac{1}{q}}.$$

Поэтому найдется такое число $C(q,r)$, что функция

$$f(x) = f_{l_1,\ldots,l_N}(x) =$$

$$= CN^{-r-1+\frac{1}{q}}\chi(x) \in W_q^r(0,2\pi) \cap B_{q,1}^r(0,2\pi).$$

Оценка снизу получится следующим образом:

$$\sup_{f\in B^r_{q,\alpha}(0,2\pi)}\ \sup_{0\le\alpha\le R}\times$$

$$\times\left\|u(\alpha,\ \cdot;f)-\varphi_N(\hat{f}(m_1),\dots,\hat{f}(m_N),\alpha,\cdot)\right\|_{L^p}\ \ge$$

$$\ge\ \sup_{f\in B^r_{q,\alpha}(0,2\pi)}\ \sup_{0\le\alpha\le R}\times$$

$$\times\left\|u(\alpha,\ \cdot;f)-\varphi_N(\hat{f}(m_1),\dots,\hat{f}(m_N),\alpha,\cdot)\right\|_{L^p}\ \ge$$

$$\ge\ \sup_{0\le\alpha\le R}\times\left\|u\left(\alpha,\cdot;f_{l_1,\dots,l_N}(\cdot)\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi_N(\hat{f}_{l_1,\dots,l_N}(m_1),\dots,\hat{f}_{l_1,\dots,l_N}(m_N),\alpha,\cdot)\right\|_{L^p}\ \ge$$

$$\ge\left\|u\left(R,\ \cdot;f_{l_1,\dots,l_N}(\cdot)\right)\right\|_{L^p}=\left\|f_{l_1,\dots,l_N}(\cdot)\right\|_{L^p}=$$

$$=CN^{-r-1+\frac{1}{q}}\left\|\chi(\cdot)\right\|_{L^p}.$$

Далее, применяя неравенство Никольского для тригонометрических полиномов порядка N

$$\left\|T(x)\right\|_{p_2}\le N^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\left\|T(x)\right\|_{p_1}\ \ (1\le p_1<p_2\le+\infty),$$

и учитывая (3), получим оценку снизу

$$\delta_N(L_N,F)\ge C\,N^{-r-1+\frac{1}{q}}N^{-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\infty}}\left\|\chi\right\|_{L^\infty}\ge$$

$$\ge C\,N^{-r+\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}}.$$

Тем самым, теорема доказана.

Замечание. *Из доказательства видно, что оценки сверху в пунктах а) и б) теоремы верны также и для* $1\le q<2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темиргалиев Н.* Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестник Евраз. ун-та. 1997. № 3. С. 90-144.

2. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.

3. *Осипенко К.Ю.* Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди-Соболева // Мат. сбор. 2001. Т. 192, №2. С. 67-86.

4. *Magaril Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu.* Optimal recovery of function and they derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error // Sbornik: Mathematics. 193:3. 387-407.

5. *Osipenko K. Yu., Wilderotter K.* Optimal information for approximating periodic analytic function // Mathematics of computation. 1997. V. 66, N 220. P. 1579-1592.

6. *Ажгалиев Ш.У., Темиргалиев Н.* Об информативной мощности линейных функционалов // Матем. заметки. 2003. Т. 73: 6. С. 803- 812.

7. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

Резюме

Шекаралық шарттардың тригонометриялық Фурье коэффициенттерінің берілген мәндері бойынша Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебінің шешімін жуықтап қалыптастырудың кателіктерінің дәл, жақсармайтын реті табылған және сәйкес жақсармайтын оператор құрылған.

Summary

The optimum orders of discretization of the solution are found by Fourier's coefficients of the boundary condition are used. The optimum orders of restorations error is found and the corresponding optimum operator of restoration is constructed.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 19.09.09г.