

УДК 517.984

Ш. БИЛАЛ

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Рассматривается однородное дифференциальное уравнение Штурма-Лиувилля. Показано существование двух линейно независимых решений, образующих фундаментальную систему, и указаны некоторые их свойства.

**Введение.** Пусть  $J = (a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ .

Рассмотрим однородное уравнение Штурма-Лиувилля

$$-(\rho(x)y'(x))' + v(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

где  $\rho(x)$  – положительная непрерывно-дифференцируемая в  $J$  функция,  $v(x) \geq 1$  – непрерывная в  $J$  функция. Предположим, что выполнено условие

A: Для некоторого  $c \in (a, b)$  функция

$$T_a(t) = \int_t^c \rho^{-1}(s) \int_s^c v(\tau) d\tau ds, \quad T_b(t) = \int_c^t \rho^{-1}(s) \int_c^s v(\tau) d\tau ds.$$

1) неинтегрируема в окрестности точки  $a(b)$ ,

2)  $\lim_{t \rightarrow a} T_a(t) = \infty$  ( $\lim_{t \rightarrow b} T_b(t) = \infty$ ).

Заметим, что если  $a(b)$  бесконечность, то условие A.1 всегда выполнено в силу монотонности функции  $T_a(t)$  ( $T_b(t)$ ). Если  $a(b)$  конечна, то условие A.2 является следствием условия A.1. Отметим еще следующее условие, вытекающее из условия A.

$$\int_c^b \rho^{-1}(s) ds \int_c^b v(s) ds = \infty \left( \int_a^c \rho^{-1}(s) ds \int_a^c v(s) ds = \infty \right). \quad (2)$$

Введем следующие функции

$$d_+(x) = \sup \left\{ d > 0 : \int_x^{x+d} \rho^{-1}(s) ds \int_x^{x+d} v(s) ds \leq 1, [x, x+d] \subset J \right\},$$

$$d_-(x) = \sup \left\{ d > 0 : \int_{x-d}^x \rho^{-1}(s) ds \int_{x-d}^x v(s) ds \leq 1, (x-d, x] \subset J \right\}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) вытекают следующие равенства

$$\int_x^{x+d_+(x)} \rho^{-1}(s) ds \int_x^{x+d_+(x)} v(s) ds = 1, \quad \int_{x-d_-(x)}^x \rho^{-1}(s) ds \int_{x-d_-(x)}^x v(s) ds = 1, \quad x \in J. \quad (4)$$

Положим

$$\varphi_+(x) = \int_x^{x+d_+(x)} \rho^{-1}(s) ds, \quad \varphi_-(x) = \int_{x-d_-(x)}^x \rho^{-1}(s) ds. \quad (5)$$

Основным результатом является

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие A. Тогда уравнение (1) имеет два линейно независимых решения  $y_+(x)$  и  $y_-(x)$ , обладающие следующими свойствами:

- 1)  $y_{\pm}(x) > 0$ ,  $y'_{\pm}(x) \neq 0$ ,  $x \in J$ ;
- 2.1)  $y_+(x)$  монотонно убывает,  $y_-(x)$  монотонно возрастает и  $\lim_{x \rightarrow b} y_+(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y_-(x) = 0$  при  $b = \infty$ ,  $a = -\infty$  соответственно;
- 2.2)  $\lim_{x \rightarrow b} y_+(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} y_-(x) = 0$  при  $\int_a^b v(s)ds = \infty$  и  $b < \infty$ ,  $\int_c^b v(s)ds = \infty$  и  $a < \infty$  соответственно;  
 $c \in (a, b)$ .
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} \rho(x)y'_-(x) = \lim_{x \rightarrow b} \rho(x)y'_+(x) = 0$ ;
- 4)  $\frac{1}{2}\varphi_{\pm}^{-1}(x)y_{\pm}(x) \leq \mp\rho(x)y'_{\pm}(x) \leq 2\varphi_{\pm}^{-1}(x)y_{\pm}(x)$ ,  $x \in J$ .

*Доказательство.* Пусть  $t \in (a, b)$  произвольная точка. Рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля на  $C_0^{\infty}(t, b)$ :

$$\mathcal{L} y = -(\rho(x)y'(x))' + v(x)y(x), \quad \mathcal{D}(\mathcal{L}) = C_0^{\infty}(t, b), \quad v(x) \geq 1.$$

Имеют место неравенство  $\|\mathcal{L} y\|_2 \geq \|y\|_2$  [1]  $\forall y \in C_0^{\infty}(t, b)$  и равенство  $(\mathcal{L} z, y) = (z, \mathcal{L} y)$  для всех  $y, z \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) = C_0^{\infty}(t, b)$ , то есть  $\mathcal{L}$  симметричен. Тогда оператор  $\mathcal{L}$  всегда допускает замыкание [2].

Если обозначить через  $H_t$  замыкание оператора  $\mathcal{L}$  по норме  $L_2(t, b)$ , то вышеуказанные неравенство и равенство имеют место и для  $H_t$ , в силу непрерывности норм, и следовательно  $H_t$  – полуограниченный, замкнутый, симметрический оператор. Поэтому [3, с.158] размерность подпространства  $\dim Ker(H_t^* - \lambda)$  постоянна для всех  $\lambda \in C \setminus [1, \infty)$ . С другой стороны, точка  $t$  является регулярной, а точка  $b$  сингулярной для оператора  $H_t$  и следовательно [4, стр.46] индекс дефекта оператора  $H_t$  больше единицы, то есть размерность подпространства  $\dim Ker(H_t^* - \lambda)$  больше единицы. Отсюда при  $\lambda = 0 \in C \setminus [1, \infty)$ , размерность  $Ker H_t^*$  больше единицы. Это равносильно тому, что уравнение (1) имеет хотя бы одно нетривиальное решение, принадлежащее  $L_2(t, b)$ . В силу вещественности коэффициентов уравнения (1), это решение можно считать вещественным.

Пусть  $y_+(x)$  – это решение. В (1) полагая  $y(x) = y_+(x)$ , умножим обе части уравнения на  $y_+(x)$  и проинтегрируем на промежутке  $(t, z) \subset (t, b)$ . Тогда

$$\rho(z)y'_+(z)y_+(z) = \rho(t)y'_+(t)y_+(t) + \int_t^z (\rho(s)|y'_+(s)|^2 + v(s)|y_+(s)|^2)ds. \quad (6)$$

Если  $y'_+(t)y_+(t) = \frac{1}{2} \frac{dy_+^2(z)}{dz} \Big|_{z=t} \geq 0$ , то из (6) вытекает

$$\frac{1}{2} \frac{dy_+^2(z)}{dz} \geq \rho^{-1}(z) \int_t^z (\rho(s)|y'_+(s)|^2 + v(s)|y_+(s)|^2)ds > 0. \quad (7)$$

Это означает, что функция  $y_+^2(z)$  монотонно возрастает при  $z > t$ . Тогда  $y_+(z) \in L_2(t, b)$ , если  $b = \infty$ .

Рассмотрим случай  $b < \infty$ . Из (7) имеем

$$\frac{dy_+^2(z)}{dz} \geq 2\rho^{-1}(z) \int_{t_1}^z v(s)y_+^2(s)ds \geq 2\rho^{-1}(z)y_+^2(t_1) \int_{t_1}^z v(s)ds, \quad (8)$$

где  $t < t_1 < z$  и  $y_+^2(t_1) > 0$ . Такая точка  $t_1$  существует в силу монотонного возрастания  $y_+^2(\cdot)$ . Интегрируя (8) от  $t_1$  до  $x < b$  имеем

$$y_+^2(x) \geq y_+^2(t_1) \left( 1 + 2 \int_{t_1}^x \rho^{-1}(s) \int_{t_1}^s v(\tau) d\tau ds \right).$$

Откуда в силу условия А следует, что  $y_+(x) \in L_2(t, b)$  для всех  $x \in (t, b)$ . Таким образом, мы получили, что  $y_+(x) \in L_2(t, b)$  конечна или нет точка  $b$ . Полученное противоречие показывает, что  $y'_+(t)y_+(t) < 0$  при всех  $t \in J = (a, b)$ . Поэтому можно считать, что  $y_+(x) > 0$ ,  $y'_+(x) < 0$  в  $J$ . Тогда  $y_+(x)$  монотонно убывает и  $\lim_{x \rightarrow b} y_+(x) = 0$ , если  $b = \infty$ , так как  $y_+(x) \in L_2(t, b)$ . А случай  $b < \infty$  рассмотрим позже. Здесь установим справедливость свойства 4).

При  $x > t$

$$y_+(t) = \left| \int_t^x y'_+(s) ds \right| + y_+(x) \leq \left( \int_t^x \rho^{-1}(s) ds \right)^{1/2} \left( \int_t^x \rho(s) |y'_+(s)|^2 ds \right)^{1/2} + y_+(x). \quad (9)$$

Умножим обе части (9) на  $v(x)$  и проинтегрируем на промежутке  $(t, z)$  по  $x$ , затем применяя неравенство Гельдера получим

$$\begin{aligned} y_+(t) \int_t^z v(x) dx &\leq \int_t^z v(x) dx \left( \int_t^z \rho^{-1}(s) ds \right)^{1/2} \left( \int_t^z \rho(s) |y'_+(s)|^2 ds \right)^{1/2} + \int_t^z v(x) y_+(x) dx \leq \\ &\leq \int_t^z v(x) dx \left( \int_t^z \rho^{-1}(s) ds \right)^{1/2} \left( \int_t^z \rho(s) |y'_+(s)|^2 ds \right)^{1/2} + \left( \int_t^z v(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_t^z v(s) y_+^2(s) ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся неравенством

$$(ab)^{1/2} + (cd)^{1/2} \leq (a+c)^{1/2} (b+d)^{1/2}. \quad (10)$$

Это выполнимо для  $a, b, c, d \geq 0$ , так как  $2(abcd)^{1/2} \leq ad + bc$ . Имеем

$$y_+(t) \int_t^z v(x) dx \leq \left[ \left( \int_t^z v(x) dx \right)^2 \int_t^z \rho^{-1}(s) ds + \int_t^z v(x) dx \right]^{1/2} \times \left[ \int_t^z \rho(s) |y'_+(s)|^2 ds + \int_t^z v(s) y_+^2(s) ds \right]^{1/2}.$$

Откуда

$$y_+^2(t) \leq \left[ \int_t^z \rho^{-1}(s) ds + \left( \int_t^z v(s) ds \right)^{-1} \right] \times \left[ \int_t^z \rho(s) |y'_+(s)|^2 ds + \int_t^z v(s) y_+^2(s) ds \right]. \quad (11)$$

При  $x > t$  из уравнения (1) с учетом  $y'_+ < 0$  имеем

$$\begin{aligned} \rho(t)|y'_+(t)| &= \rho(x)|y'_+(t)| + \int_t^x v(s)y_+(s)ds \text{ или} \\ \rho(t)|y'_+(t)|\rho^{-1}(x) &= |y'_+(x)| + \rho^{-1}(x) \int_t^x v(s)y_+(s)ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Проинтегрируем (12) на промежутке  $(t, z)$  по  $x$  и применим неравенство Гельдера.

$$\begin{aligned} \rho(t)|y'_+(t)| \int_t^z \rho^{-1}(x) dx &\leq \int_t^z |y'_+(x)| dx + \int_t^z \rho^{-1}(x) dx \int_t^z v(x) y'_+(x) dx \leq \\ &\leq \left( \int_t^z \rho^{-1}(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_t^z \rho(x) |y'_+(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \int_t^z \rho^{-1}(x) dx \left( \int_t^z v(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_t^z v(x) y'^2_+(x) dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left[ \int_t^z \rho^{-1}(x) dx + \left( \int_t^z \rho^{-1}(x) dx \right)^2 \int_t^z v(x) dx \right]^{1/2} \left[ \int_t^z \rho(x) |y'_+(x)|^2 dx + \int_t^z v(x) y'^2_+(x) dx \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Это справедливо в силу (10). Отсюда

$$(\rho(t)y'_+(t))^2 \leq \left[ \left( \int_t^z \rho^{-1}(x) dx \right)^{-1} + \int_t^z v(x) dx \right] \left[ \int_t^z \rho(x) |y'_+(x)|^2 dx + \int_t^z v(x) y'^2_+(x) dx \right]. \quad (13)$$

Теперь в (11) и (13), полагая  $z = t + d_+(t)$ , и на основании (4), (5) получим соответственно

$$y'^2_+(t) \leq 2\varphi_+(t) \int_t^{t+d_+(t)} (\rho(x) |y'_+(x)|^2 + v(x) y'^2_+(x)) dx, \quad (14)$$

$$(\rho(t)y'_+(t))^2 \leq 2\varphi_+^{-1}(t) \int_t^{t+d_+(t)} (\rho(x) |y'_+(x)|^2 + v(x) y'^2_+(x)) dx. \quad (15)$$

Из (6) при  $z = t + d_+(t)$  и  $\rho(\cdot)y'_+(\cdot)y_+(\cdot) \leq 0$  получим

$$0 \geq \rho(t)y'_+(t)y_+(t) + \int_t^{t+d_+(t)} (\rho(s) |y'_+(s)|^2 + v(s) y'^2_+(s)) ds.$$

Или

$$\rho(t)|y'_+(t)|y_+(t) \geq - \int_t^{t+d_+(t)} (\rho(s) |y'_+(s)|^2 + v(s) y'^2_+(s)) ds.$$

Теперь с учетом (14), (15) получим

$$\rho(t)|y'_+(t)|y_+(t) \geq \frac{1}{2}\varphi_+^{-1}(t)y'^2_+(t), \quad \rho(t)|y'_+(t)|y_+(t) \geq \frac{1}{2}\varphi_+(t)(\rho(t)y'_+(t))^2.$$

Откуда  $\rho(t)|y'_+(t)| \geq \frac{1}{2}\varphi_+^{-1}(t)y_+(t)$  и  $y_+(t) \geq \frac{1}{2}\varphi_+(t)\rho(t)|y'_+(t)|$  что равносильно условию 4).

Теперь покажем выполнение 2.2). Пусть  $\int_c^b v(s) ds = \infty$  и  $b < \infty$ . Из (6) в силу  $y'_+(\cdot) < 0$  имеем

$$\rho(t)|y'_+(t)|y_+(t) = \rho(z)|y'_+(z)|y_+(z) + \int_t^z (\rho(s) |y'_+(s)|^2 + v(s) y'^2_+(s)) ds. \quad (16)$$

Отсюда видно, что положительная функция  $\rho(t)|y'_+(t)|y_+(t)$  – монотонно убывает и поэтому переходя к пределу в (16) при  $z \rightarrow b$ , получим

$$\rho(t)|y'_+(t)|y_+(t) = \beta + \int_t^b (\rho(s)|y'_+(s)|^2 + v(s)y_+^2(s))ds < \infty,$$

где  $\beta = \lim_{z \rightarrow b} \rho(z)|y'_+(z)|y_+(z)$ . Следовательно

$$\int_t^b v(s)y_+^2(s)ds < \infty. \quad (17)$$

Если  $\lim_{x \rightarrow b} y_+(x) = \alpha \neq 0$ , то из (17) и из  $y_+(x) \geq \alpha$  имеем  $\alpha^2 \int_t^b v(s)ds < \infty$ , что противоречит заданному условию. Поэтому  $\alpha = 0$ .

Теперь обозначим через  $G_t$  замыкание по норме  $L_2(a, t)$  оператора Штурма-Лиувилля  $L$  на  $C_0^\infty(a, t)$ ,  $t \in (a, b)$ . Рассуждая аналогичным образом, как с оператором  $H_t$ , приходим к утверждению, что уравнение (1) имеет хотя бы одно, нетривиальное решение, принадлежащее  $L_2(a, t)$ . Пусть  $y_-(t)$  это решение, вещественное, в силу вещественности коэффициентов уравнения (1). Тогда для  $(z, t) \subset (a, t)$  из (1) имеем

$$\rho(z)y'_-(z)y_-(z) = \rho(t)y'_-(t)y_-(t) + \int_t^z (\rho(s)|y'_-(s)|^2 + v(s)y_-^2(s))ds. \quad (18)$$

Если  $y'_-(t)y_-(t) \leq 0$ , то из (18) вытекает, что

$$\frac{dy_-^2(z)}{dz} \leq 2\rho^{-1}(z) \int_t^z (\rho(s)|y'_-(s)|^2 + v(s)y_-^2(s))ds < 0. \quad (19)$$

Значит  $y_-^2(z)$  монотонно возрастает в сторону левого конца интервала  $(a, b)$ . То есть  $y_-(z) \in L_2(a, t)$ , если  $a = -\infty$ .

Пусть  $a > -\infty$ . Из (19) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dy_-^2(z)}{dz} &\leq -2\rho^{-1}(z) \int_z^{t_1} (\rho(s)|y'_-(s)|^2 + v(s)y_-^2(s))ds \leq \\ &\leq -2\rho^{-1}(z) \int_z^{t_1} v(s)y_-^2(s)ds \leq -2\rho^{-1}(z)y_-^2(t_1) \int_z^{t_1} v(s)ds, \end{aligned}$$

где  $t > t_1 > z$  и  $y_-^2(t_1) > 0$ . Интегрируя (20) от  $x > a$  до  $t_1$  имеем

$$y_-^2(x) \geq y_-^2(t_1) \left( 1 + 2 \int_x^{t_1} \rho^{-1}(s) \int_s^{t_1} v(\tau)d\tau ds \right) \in L_1(a, t)$$

в силу условия А. Таким образом,  $y_-(\cdot) \in L_2(a, t)$ . Полученное противоречие показывает, что  $y'_-(t)y_-(t) > 0$ ,  $t \in J = (a, b)$ . Поэтому  $y'_-(t) > 0$ ,  $y_-(t) > 0$  в  $J$ . Тогда  $y_-(x)$  монотонно убывает и  $\lim_{x \rightarrow a} y_-(x) = 0$ , если  $a = -\infty$ , так как  $y_-(\cdot) \in L_2(a, t)$ . Случай  $a > -\infty$  рассматривается аналогичным образом, как для  $y_+(x)$ . Покажем выполнение свойства 4).

При  $x < t$        $y_-(t) = \int\limits_x^t y'_-(s)ds + y_-(x)$ . Далее, поступая аналогичным образом, как с  $y_+(\cdot)$ , имеем

$$y_-^2(t) \leq \left[ \int\limits_z^t \rho^{-1}(x)dx + \left( \int\limits_z^t v(x)dx \right)^{-1} \right] \left[ \int\limits_z^t \rho(x)|y'_-(x)|^2 dx + \int\limits_z^t v(x)y_-^2(x)dx \right]. \quad (22)$$

Из уравнения (1) при  $x < t$  имеем  $\rho(t)y'_-(t) = \rho(x)y'_-(x) + \int\limits_x^t v(s)y_-(s)ds$ . Или  $\rho(t)y'_-(t)\rho^{-1}(x) = y'_-(x) + \rho^{-1}(x)\int\limits_x^t v(s)y_-(s)ds$ . Отсюда имеем аналогичную к (13) оценку

$$(\rho(t)y'_-(t))^2 \leq \left( \left( \int\limits_z^t \rho^{-1}(s)ds \right)^{-1} + \int\limits_z^t v(s)ds \right) \left( \int\limits_z^t \rho(s)|y'_-(s)|^2 ds + \int\limits_z^t v(s)y_-^2(s)ds \right). \quad (23)$$

В (22) и (23) полагая  $z = t - d_-(t)$ , получим

$$y_-^2(t) \leq 2\phi_-(t) \int\limits_{t-d_-(t)}^t (\rho(s)|y'_-(s)|^2 + v(s)y_-^2(s))ds, \quad (24)$$

$$(\rho(t)y'_-(t))^2 \leq 2\phi_-^1(t) \int\limits_{t-d_-(t)}^t (\rho(s)|y'_-(s)|^2 + v(s)y_-^2(s))ds. \quad (25)$$

Из (18) при  $z = t - d_-(t)$  и  $\rho(\cdot)y'_-(\cdot)y(\cdot) \geq 0$  имеем

$$\rho(t)y'_-(t)y_-(t) - \int\limits_{t-d_-(t)}^t (\rho(s)|y'_-(s)|^2 + v(s)y_-^2(s))ds \geq 0.$$

Отсюда с учетом (24), (25), получим свойство 4).

Теперь докажем утверждение 3).

Из тождества Лагранжа  $\mu = \rho(x)y'_-(x)y_+(x) - \rho(x)y'_+(x)y_-(x)$ , имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho(x)y'_-(x) \leq \frac{\mu}{y_+(x)}, \\ 0 &\leq \rho(x)|y'_+(x)| \leq \frac{\mu}{y_-(x)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя решения  $y(x) = y_-(x)$  в (1) и интегрируя на интервале  $(c, t) \subset (c, b)$ , получим

$$\rho(t)y'_-(t) = \int\limits_c^t v(s)y_-(s)ds + \rho(c)y'_-(c).$$

Отсюда  $y'_-(t) \geq \rho^{-1}(t)\int\limits_c^t v(s)y_-(s)ds \geq y_-(c)\rho^{-1}(t)\int\limits_c^t v(s)ds$ . Интегрируя еще раз на  $(c, t)$  получим

$$y_-(t) \geq y_-(c)\int\limits_c^t \rho^{-1}(s)\int\limits_c^s v(\tau)d\tau ds. \quad (27)$$

Откуда в силу условия А, следует  $\lim_{t \rightarrow b} y_-(t) = \infty$ . Тогда из (26) имеем

$$\lim_{x \rightarrow b} \rho(x)|y'_+(x)| = 0.$$

Аналогично доказывается предел  $\lim_{x \rightarrow a} \rho(x)y'_-(x) = 0$ .

Теорема 1 доказана.

Из утверждения 4) теоремы вытекают следствия.

**Следствие 1.** Для  $z \geq t$

$$e^{-\frac{1}{2}\int_t^z \varphi_+^{-1}(\tau)\rho^{-1}(\tau)d\tau} \leq \frac{y_+(z)}{y_+(t)} \leq e^{-\frac{1}{2}\int_t^z \varphi_+^{-1}(\tau)\rho^{-1}(\tau)d\tau}.$$

Действительно, из утверждения теоремы  $-\frac{1}{2}\varphi_+^{-1}y_+ \leq -\rho y'_+ \leq 2\varphi_+^{-1}y_+$ . Или  $-\frac{1}{2}\varphi_+^{-1}y_+ \geq \rho y'_+ \geq -2\varphi_+^{-1}y_+$ . Отсюда

$$-\frac{1}{2}\varphi_+^{-1}\rho^{-1} \geq \frac{y'_+}{y_+} \geq -2\varphi_+^{-1}\rho^{-1}.$$

Теперь, проинтегрируя от  $t$  до  $z$ , получим

$$-\frac{1}{2}\int_t^z \varphi_+^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds \geq \ln \frac{y_+(z)}{y_+(t)} \geq -2\int_t^z \varphi_+^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds.$$

**Следствие 2.** Для  $z \geq t$

$$e^{\frac{1}{2}\int_t^z \varphi_-^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds} \leq \frac{y_-(z)}{y_-(t)} \leq e^{\frac{1}{2}\int_t^z \varphi_-^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds}.$$

По утверждению теоремы  $-\frac{1}{2}\varphi_-^{-1}y_- \leq \rho y'_- \leq 2\varphi_-^{-1}y_-$ . Отсюда  $-\frac{1}{2}\varphi_-^{-1}\rho^{-1} \leq \frac{y'_-}{y_-} \leq 2\varphi_-^{-1}\rho^{-1}$ . Интегрируя на интервале  $(t, z) \subset (a, z)$ , получим

$$\frac{1}{2}\int_t^z \varphi_-^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds \leq \ln \frac{y_-(z)}{y_-(t)} \leq 2\int_t^z \varphi_-^{-1}(s)\rho^{-1}(s)ds.$$

**Следствие 3.** Для  $z \geq t$

$$e^{-\frac{1}{2}\int_t^z v(s)\varphi_+(s)ds} \geq \frac{\rho(z)y'_+(z)}{\rho(t)y'_+(t)} \geq e^{-\frac{1}{2}\int_t^z v(s)\varphi_+(s)ds}.$$

По теореме  $-\frac{1}{2}\varphi_+^{-1}y_+ \geq \rho y'_+ \geq -2\varphi_+^{-1}y_+$ . Отсюда

$$-\frac{1}{2}\varphi_+(\rho y'_+) \leq y_+ \leq -2\varphi_+(\rho y'_+).$$

Из уравнения (1),  $(\rho y'_+)' = vy_+$ . Пользуясь этим, получим

$$-2v\varphi_+ \leq \frac{(\rho y'_+)'}{\rho y'_+} \leq -\frac{1}{2}v\varphi_+.$$

Интегрируя на интервале  $(t, z) \subset (t, b)$ , получим

$$-2 \int_t^z v(s)\varphi_+(s)ds \leq \ln \frac{\rho(z)y'_+(z)}{\rho(t)y'_+(t)} \leq -\frac{1}{2} \int_t^z v(s)\varphi_+(s)ds.$$

**Следствие 4.** Для  $z \geq t$

$$e^{-\frac{1}{2} \int_t^z v(s)\varphi_-(s)ds} \leq \frac{\rho(z)y'_-(z)}{\rho(t)y'_-(t)} \leq e^{-\frac{1}{2} \int_t^z v(s)\varphi_-(s)ds}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- Мынбаев К.Т., Отчельбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988. 288 с.
- Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
- Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. 1978. 400 с.
- Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

#### Резюме

Штурм-Лиувилль біртекті дифференциал теңдеуді карастырылады. Іргелі жүйе күратын екі сызықты тәуелсіз шешімдердің болатындығы көрсетіліп, олардың кейбір касиеттері көлтірілген.

#### Summary

Shturm-Liouville's homogenous differential equation is considered. Existence of combining fundamental system two linear non dependent solutions ore established its some properties are indicated shown.