

УДК 517.984

Ш. БИЛАЛ, Е.Д. СИЫРБАЕВ

ПОЗИТИВНОСТЬ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В  $L_p$ *(Представлена академиком НАН РК М.О. Отелбаевым)*

В работе с использованием функции Грина оператора Штурма-Лиувилля показана позитивность самого оператора. При этом использована испытанныя в работах Р.Ойнарова методика введения регулирующих функций. Построена функция Грина для уравнения Штурма-Лиувилля на базе найденных двух линейно-независимых решений, существование которых доказано в предыдущих работах автора. Данная работа является их логическим продолжением.

В работе исследовано одно из существенных свойств оператора в рамках новоявленных специфических терминов, усиливающих прозрачность решения проблемы.

Пусть  $J = (a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . В пространстве  $L_p \equiv L_p(J)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $J = (a, b) \subseteq R$ , определим оператор  $L_p$

$$L_p y = -(\rho(x)y'(x))' + v(x)y(x), \quad y \in D(L_p),$$

соответствующий уравнению

$$-(\rho(x)y'(x))' + v(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

где  $\rho(x)$  – положительная непрерывно-дифференцируемая в  $J$  функция,  $v(x) \geq 1$  непрерывная в  $J$  функция. Область определения  $D(L_p) \equiv D_p$  оператора  $L_p$  состоит из функций  $y(x) \in L_p$  таких, что функции  $y(x)$ ,  $\rho(x)y'(x)$  локально абсолютно непрерывны и  $L_p y$  принадлежит  $L_p$ .

Пусть будет задано

**Условие A:** Для некоторого  $c \in (a, b)$  функция

$$T_a(t) = \int_t^c \rho^{-1}(s) \int_s^c v(\tau) d\tau$$

$$\left( T_b(t) = \int_c^t \rho^{-1}(s) ds \int_c^s v(\tau) d\tau \right)$$

1) не интегрируема в окрестности точки  $a$  ( $b$ ),

$$2) \lim_{t \rightarrow a} T_a(t) = \infty \quad \left( \lim_{t \rightarrow b} T_b(t) = \infty \right).$$

Отсюда следует, что если  $a(b)$  бесконечность, то условие A.1 всегда выполнено в силу монотонности функции  $T_a(t)$  ( $T_b(t)$ ). Если  $a(b)$

конечна, то условие A.2 является следствием условия A.1. Отметим следующее условие, вытекающее из условия A.

$$\int_c^b \rho^{-1}(s) ds \int_c^b v(s) ds = \infty$$

$$\left( \int_a^c \rho^{-1}(s) ds \int_a^c v(s) ds = \infty \right)$$

Введем следующие функции:

$$d_+(x) = \sup \left\{ d > 0 : \int_x^{x+d} \rho^{-1}(s) ds \int_x^{x+d} v(s) ds \leq 1, [x, x+d] \subset J \right\},$$

$$d_-(x) = \sup \left\{ d > 0 : \int_{x-d}^x \rho^{-1}(s) ds \int_{x-d}^x v(s) ds \leq 1, (x-d, x] \subset J \right\}$$

Положим

$$\varphi_+(x) = \int_x^{x+d_+(x)} \rho^{-1}(s) ds, \quad \varphi_-(x) = \int_{x-d_-(x)}^x \rho^{-1}(s) ds.$$

Из результатов работы [1] следует, что  $D_p$  плотна в  $L_p$  и  $L_p$  – замкнутый оператор.

**Определение** [2, стр.274]. Линейный замкнутый оператор  $A$ , действующий в банаховом пространстве  $E$  и с  $\overline{D(A)} = E$  будет позитивным,

если  $\forall \lambda > 0$  существуют операторы  $(A + \lambda I)^{-1}$  и если

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + \lambda} \quad (\lambda \geq 0).$$

Имеет место следующая

**Теорема.** Пусть выполнено условие А. Тогда оператор  $L_p$  непрерывно обратим и позитивен.

Предварительно докажем лемму.

**Лемма.** Пусть выполнено условие А. Тогда уравнение (1) не имеет решений из  $L_p(J)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $y_+(x)$ ,  $y_-(x)$  решения уравнения (1), удовлетворяющие теореме:

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие А. Тогда уравнение (1) имеет два линейно независимых решения  $y_+(x)$  и  $y_-(x)$ , обладающие следующими свойствами:

$$1) y_{\pm}(x) > 0, y_{\pm}(x) \neq 0, x \in J;$$

2.1)  $y_+(x)$  монотонно убывает,  $y_-(x)$  монотонно возрастает и  $\lim_{x \rightarrow b} y_+(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y_-(x) = 0$  при  $b = \infty$ ,  $a = -\infty$  соответственно;

$$2.2) \lim_{x \rightarrow b} y_+(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} y_-(x) = 0 \quad \text{при}$$

$\int_c^b v(s)ds = \infty$  и  $b < \infty$ ,  $\int_a^c v(s)ds = \infty$  и  $a < \infty$  соответственно:  $c \in (a, b)$ ;

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \rho(x)y'_-(x) = \lim_{x \rightarrow b} \rho(x)y'_+(x) = 0;$$

$$4) \frac{1}{2}\varphi_{\pm}^{-1}(x)y_{\pm}(x) \leq \mp\rho(x)y'_{\pm}(x) \leq 2\varphi_{\pm}^{-1}(x)y_{\pm}(x), \quad x \in J.$$

Тогда любое решение  $y(x)$  уравнения (1) запишется в виде

$$y(x) = C_1 y_+(x) + C_2 y_-(x) \quad (2)$$

По выражению (17) из [3], на основании А следует, что  $y_-(t) \notin L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , в окрестности точки  $b$ . Если покажем, что в окрестности точки  $b$   $y_+(x) \in L_p$ , то этим мы докажем, что (2) не принадлежит  $L_p$  ни при каких значениях  $C_1$ ,  $C_2$ .

При  $1 \leq p \leq \infty$  для любого  $x \in J = (a, b)$  на основании утверждения 3) теоремы 2, имеем

$$\begin{aligned} \int_x^b y_+^p(s)ds &\leq y_+^{p-1}(x) \int_x^b y_+(s)ds \leq y_+^{p-1}(x) \int_x^b v(s)y_+(s)ds = \\ &= y_+^{p-1}(x) \int_x^b (\rho(s)y'_+(s))' ds = y_+^{p-1}(x)\rho(x)y'_+(x). \end{aligned}$$

В силу монотонности  $y_+(t)$ ,  $\sup_{x \leq t \leq b} y_+(t) = y_+(x)$ . Таким образом, для любого  $x \in J = (a, b)$ ,  $y_+(\cdot) \in L_p(x, b)$ . Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 1.** В силу леммы 1, обратный оператор  $L_p^{-1}$  существует. Покажем, что  $L_p^{-1}$  имеет вид

$$L_p^{-1}f = \int_J G(x, s)f(s)ds \quad (3)$$

и ограниченно действует в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Здесь

$$G(x, s) = \begin{cases} y_+(x)y_-(s) & \text{при } s \leq x \\ y_-(x)y_+(s) & \text{при } s > x \end{cases}$$

есть функция Грина оператора  $L_p$ . Постоянная  $\mu$  взята из тождества Лагранжа

$$\mu = \rho(x)y'_-(x)y_+(x) - \rho(x)y'_+(x)y_-(x)$$

В дальнейшем, без ограничения общности, положим  $\mu = 1$ .

Сначала покажем, что для любого  $f \in L_p$

$$Kf = \int_J G(x, s)f(s)ds$$

принадлежит  $D_p$ . Действительно, из представления

$$(Kf)(x) = y_-(x) \int_x^b y_+(s)f(s)ds + y_+(x) \int_a^x y_-(s)f(s)ds \quad (4)$$

следует, что  $Kf$  локально абсолютно непрерывен, если существуют интегралы в (4). Существование интегралов в (4) следует из неравенств

$$\int_x^b y_+(s)f(s)ds \leq \|y_+(\cdot)\|_{L_p(x, b)} \|f\|_{L_p(J)} < \infty,$$

$$\int_a^x y_-(s)f(s)ds \leq \|y_-(\cdot)\|_{L_p(a, x)} \|f\|_{L_p(J)} < \infty,$$

где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Эти неравенства справедливы в силу неравенства Гельдера и функция  $f(\cdot)$  суммируема с  $p$ -ой степенью на всем интервале  $J = (a, b)$ . Тогда из (4) имеем

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{d}{dx} (Kf)(x) &= \rho(x) y'_-(x) \int_x^b y_+(s) f(s) ds + \\ &+ \rho(x) y'_+(x) \int_a^x y_-(s) f(s) ds \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда видно, что  $f(x) \frac{d}{dx} (Kf)(x)$  тоже локально абсолютно непрерывен.

Дифференцируя (5) еще раз, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \rho(x) \frac{d}{dx} (Kf)(x) \right) &= (\rho(x) y'_-(x))' \int_x^b y_+(s) f(s) ds - \\ &- \rho(x) y''_-(x) y_+(x) f(x) + \\ &+ (\rho(x) y'_+(x))' \int_a^x y_-(s) f(s) ds + \rho(x) y'_+(x) y_-(x) f(x) = \\ &= v(x) \left( y_-(x) \int_x^b y_+(s) f(s) ds + \right. \\ &\left. + y_+(x) \int_a^x y_-(s) f(s) ds \right) - (\rho(x) y'_-(x) y_+(x) - \\ &- \rho(x) y'_+(x) y_-(x)) f(x) = v Kf - f. \end{aligned}$$

То есть

$$L_p Kf = f. \quad (6)$$

Таким образом, для любого  $f \in L_p$ ,

$$Kf \in D_p.$$

С другой стороны, из (6) и из существования  $L_p^{-1}$  следует, что  $L_p^{-1}$  определен во всем пространстве  $L_p$  и имеет место (3).

Теперь оценим норму оператора  $L_1^{-1}$ .

$$\|L_1^{-1}\|_{1 \rightarrow 1} = \sup_{x \in J} \left( y_-(x) \int_x^b y_+(s) ds + y_+(x) \int_a^x y_-(s) ds \right).$$

Положим

$$v_+(x) = \inf_{x \leq t \leq b} v(t), \quad v_-(x) = \inf_{a \leq t \leq x} v(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_-(x) \int_x^b y_+(s) ds &\leq \frac{y_-(x)}{v_+(x)} \int_x^b v(s) y_+(s) ds = \\ &= \frac{y_-(x)}{v_+(x)} \int_x^b (\rho(s) y'_+(s))' ds = -\frac{y_-(x)}{v_+(x)} \rho(x) y'_+(x), \\ y_+(x) \int_a^x y_-(s) ds &\leq \frac{y_+(x)}{v_-(x)} \int_a^x v(s) y_-(s) ds = \\ &= \frac{y_+(x)}{v_-(x)} \int_a^x (\rho(s) y'_-(s))' ds = \frac{y_+(x)}{v_-(x)} \rho(x) y'_-(x) \end{aligned}$$

на основании утверждения 3) теоремы 2. С помощью этих оценок, получим

$$\|L_1^{-1}\|_{1 \rightarrow 1} \leq \sup_{x \in J} \max \left\{ \frac{1}{v_+(x)}, \frac{1}{v_-(x)} \right\} \leq 1.$$

Так как функция Грина  $G(x, s)$  симметрична, то поэтому справедливо неравенство

$$\|L_1^{-1}\|_{1 \rightarrow 1} = \|L_1^{-1}\|_{\infty \rightarrow \infty} = \|L_\infty^{-1}\|_{\infty \rightarrow \infty} \leq \sup_{x \in J} \max \left\{ \frac{1}{v_+(x)}, \frac{1}{v_-(x)} \right\} \leq 1$$

Теперь, применяя интерполяционную теорему Рисса-Торина [4, с.12], имеем

$$\|L_p^{-1}\|_{p \rightarrow p} \leq \sup_{x \in J} \max \left\{ \frac{1}{v_+(x)}, \frac{1}{v_-(x)} \right\} \leq 1.$$

Для дифференциального уравнения

$$-(\rho(x) y'(x))' + (v(x) + \lambda) y(x) = 0,$$

обратный оператор  $(L_p + \lambda)^{-1}$  существует и имеет аналогичный, как в (3) вид

$$(L_p + \lambda)^{-1} f = \int_J G(x, s, \lambda) f(s) ds$$

и ограниченно действует в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Это доказывается аналогичным образом. И норма оператора  $(L_p + \lambda)^{-1}$  оценивается также. То есть

$$\|(L_p + \lambda)^{-1}\|_{p \rightarrow p} \leq \sup_{x \in J} \max \left\{ \frac{1}{v_+(x) + \lambda}, \frac{1}{v_-(x) + \lambda} \right\} \leq \frac{1}{1 + \lambda},$$

$$1 \leq p \leq \infty.$$

Отсюда следует, что оператор  $L_p + \lambda$  непрерывно обратим и

$$\left\| (\mathcal{L}_p + \lambda)^{-1} \right\|_{p \rightarrow p} \leq \frac{1}{1 + \lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Этим самым мы доказали, что оператор  $\mathcal{L}_p$  – позитивен.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ойнаров Р. Некоторые свойства оператора Штурма-Лиувилля в  $L_p$  // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1990. №1. С. 43-47.
2. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966, 500с.
3. Ш. Билал. О некоторых свойствах оператора Штурма-Лиувилля //Изв. АН МОН РК. Сер. физ.-мат. 2009. №5. С.23-30.
4. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664с.

### Резюме

Штурм-Лиувилль операторының Грин функциясын пайдаланып, оның позитивтілігі көрсетілген. Онда Р.Ойнаров енбектерінде синалған жәндегіш функциялар енгізу өдістемесі пайдаланылды. Бар болатындығы автордың бұрынғы енбектерінде дәлелденген, екі сзықты тәуелсіз шешімдері негізінде Штурм-Лиувилль тендеуі үшін Грин функциясы құрылды. Бұл жұмыс солардың занды жалғасы болып табылады.

### Summary

Positiveness of Shturm-Liouvill's operator is established by Green function. It was used method of introduction of regulator function revising in R.Oynarov's works. Green function is constructed for Shturm-Liouvill's equation on the base of two independent solutions, existence of which was proved in author's previous works. This article is combination of them.

Институт математики,  
г. Алматы

Поступила 2.06.2010 г.