

## КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА НА ОПОРАХ КАЧЕНИЯ СО СПРЯМЛЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ОСНОВАНИЯ (Часть 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФПК)

Исследованы колебательные движения твердого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями при стохастическом воздействии. Определены функция плотности распределения вероятностей движения виброзащищаемого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями с учетом трения качения на релаксирующих грунтах путем решения соответствующих уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) методом Бубнова – Галеркина при стационарной и нестационарной постановке.

В статье рассматривается (излагается) задача определения функций плотности распределения вероятностей движения виброзащищаемого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями с помощью решения соответствующего уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК). Нестационарное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) относительно плотности распределения вероятностей движения виброзащищаемого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями, соответствующее укороченному уравнению движения виброзащищаемого тела (часть 1, формула (9)), имеет вид

$$\frac{\partial \rho(\xi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[ \frac{\bar{\mu}}{2\Delta(\xi)} \omega(\xi) \xi^{\frac{n}{n-1}} + \frac{S_0}{4} \frac{\xi}{\Delta(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi}{\Delta(\xi)} \right) + \frac{S_0}{4} \frac{\xi}{\Delta^2(\xi)} \right] \rho(\xi, t) \right\} + \frac{S_0}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\xi^2}{\Delta^2(\xi)} \rho(\xi, t) \right], \quad (1)$$

где  $\Delta(\xi) = -\frac{n}{2(n-1)} \omega(\xi) \xi \left[ 1 - \frac{n-2}{n} \frac{1}{\omega^2(\xi)} \right]$ .

$$\omega^2(\xi) = \left( \frac{N_2 K_1}{\xi^{\frac{n-2}{n-1}}} - 1 \right). \quad (2)$$

**Стационарные вынужденные колебания нелинейной системы.** Для расчета прочности конструкции необходимо знать статистические характеристики амплитуды колебаний.

Для определения функции распределения в стационарном режиме  $\rho(\xi, t) \equiv \rho_{ст}(\xi)$  необходимо в уравнение (1) положить  $\partial\rho/\partial t = 0$  и при интегрировании учесть, что поток вероятности постоянен и при  $\xi = 0$  равен нулю. После всех вычислений получим

$$\rho_{ст}(\xi) = C_1 \Delta(\xi) e^{-\frac{2\tilde{\mu}}{S_0} \int \omega(\xi) \frac{\Delta(\xi)}{\xi^{n-2}} d\xi} \quad (3)$$

Подставив выражение (2) в (3) и вычислив интеграл, получим

$$\rho_{ст}(\xi) = -\frac{n}{2(n-1)} C_1 \frac{\xi}{\sqrt{\frac{N_2 K_1}{\xi^{\frac{n-2}{n-1}}} - 1}} \left[ \frac{N_2 K_1}{\xi^{\frac{n-2}{n-1}}} - \frac{2(n-1)}{n} \right] e^{-\frac{\varepsilon \omega_0 N_2 K_1}{S_0} \left( \frac{n N_2 K_1}{2} \xi^{\frac{2}{n-1}} - \frac{2(n-1)}{n} \xi^{\frac{n}{n-1}} \right)} \quad (4)$$

Постоянная  $C_1$  определяется из условия нормировки. Обычно условие нормировки принимается

$$\int_0^{\infty} \rho_{ст}(\xi) d\xi = 1. \quad (5)$$

Исходя из физических условий задачи, амплитуда не может быть больше, чем  $(N_2 K_1)^{\frac{n-1}{n-2}}$ . При значении  $\xi \geq (N_2 K_1)^{\frac{n-1}{n-2}}$ , колебательное движение системы неустойчиво. В устойчивых колебаниях  $\xi \ll (N_2 K_1)^{\frac{n-1}{n-2}}$ , поэтому условие нормировки можно изменить, приняв верхний предел равным  $\xi_n = (N_2 K_1)^{\frac{n-1}{n-2}}$ . Тогда

$$C_1 = -\frac{2(n-1)}{n} \left\{ \int_0^{\xi_n} \frac{\xi}{\sqrt{\frac{N_2 K_1}{\xi^{\frac{n-2}{n-1}}} - 1}} \left[ \frac{N_2 K_1}{\xi^{\frac{n-2}{n-1}}} - \frac{2(n-1)}{n} \right] e^{-\frac{\varepsilon \omega_0 N_2 K_1}{S_0} \left( \frac{n N_2 K_1}{2} \xi^{\frac{2}{n-1}} - \frac{2(n-1)}{n} \xi^{\frac{n}{n-1}} \right)} d\xi \right\}^{-1}$$

При  $n = 2$  (вынужденные колебания линейной системы) из равенства (4) получим распределения

Релея  $\rho(\xi) = C \sqrt{N_2 - 1} \cdot \xi \cdot e^{-\frac{\varepsilon \omega_0 N_2}{S_0} (N_2 - 1) \xi^2}$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\rho(\xi) \rightarrow 0$ .

**Переходной режим колебания.** Для определения нестационарного распределения воспользуемся методом Бубнова – Галеркина по изложенной в [1] схеме. Преобразуем уравнение ФПК (1) к виду:

$$\frac{\partial W(\xi, t)}{\partial t} = -\frac{\xi^2}{\Delta^2(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[ \frac{\tilde{\mu} \omega(\xi) \Delta(\xi)}{2 \xi^{\frac{n-2}{n-1}}} + \frac{S_0}{4} \frac{\Delta(\xi)}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi}{\Delta(\xi)} \right) + \frac{S_0}{4} \frac{1}{\xi} \right] W(\xi, t) \right\} + \frac{S_0}{4} \frac{\xi^2}{\Delta^2(\xi)} \frac{\partial^2 W(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad (6)$$

где

$$W(\xi, t) = \frac{\xi^2}{\Delta^2(\xi)} \cdot \rho(\xi, t) \quad (7)$$

Решение ищем в форме

$$W(\xi, t) = W_{CT}(\xi) + \sum_{m=1}^k T_m(t) W_m(\xi); \quad W_{CT}(\xi) = \frac{\xi^2}{\Delta^2(\xi)} \rho_{CT}(\xi). \quad (8)$$

Зададимся функцией  $W_m(\xi)$  в виде

$$W_m(\xi) = \frac{\xi}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) L_m\left(\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right); \quad \sigma^2 = \frac{S_0}{2\nu^2 \mu} \quad (9)$$

( $\nu^2 = N_2 - 1$ ,  $L_m(\dots)$  – полиномы Лагерра), которая соответствует решению линейной задачи о вынужденных колебаниях ( $n = 2$ ). Для функции  $T_m(t)$  получим систему уравнений:

$$\sum_{m=1}^k [\alpha_{mi} \dot{T}_m(t) + \beta_{mi} T_m(t)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (10)$$

где

$$\alpha_{mi} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}} e^{-2y} L_m(y) L_i(y) dy;$$

$$\beta_{mi} = -\frac{4(n-1)^2}{n^2} \frac{S_0}{4\sigma^3} N_{1mi} - \frac{(n-1)\mu}{2n\sigma^{\frac{2n-3}{n-1}}} N_{2mi} - \frac{4(n-1)^2}{n^2} \frac{S_0}{4\sigma^3} N_{3mi};$$

$$N_{1mi} = 2\sqrt{2} \int_0^\infty \omega^{-2}(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sqrt{y} e^{-y} L_m(y)] y e^{-y} L_i(y) dy - \sqrt{2} \int_0^\infty \omega^{-2}(y) \frac{\partial}{\partial y} [e^{-y} L_m(y)] \sqrt{y} e^{-y} L_i(y) dy;$$

$$N_{2mi} = 2^{\frac{4n-3}{2(n-1)}} \int_0^\infty \omega^{-2}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \omega^2(y) y^{\frac{n}{2(n-1)}} e^{-y} L_m(y) \right] \sqrt{y} e^{-y} L_i(y) dy; \quad y = \frac{\xi^2}{2\sigma^2};$$

$$N_{3mi} = 2\sqrt{2} \int_0^\infty \omega^{-2}(y) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\ln \omega) y e^{-y} L_m(y) \right] \sqrt{y} e^{-y} L_i(y) dy;$$

$$\omega^2(y) = \frac{N_2 K_1}{(\sqrt{2}\sigma)^{\frac{n-2}{n-1}} y^{\frac{n-2}{2(n-1)}}} - 1.$$

Решение (10) ищем в виде  $T_m(t) = C_m e^{\lambda t}$ . Значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  найдем из уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\lambda + \beta_{11}, & \alpha_{21}\lambda + \beta_{21}, \dots, & \alpha_{n1}\lambda + \beta_{n1} \\ \alpha_{12}\lambda + \beta_{12}, & \alpha_{22}\lambda + \beta_{22}, \dots, & \alpha_{n2}\lambda + \beta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n}\lambda + \beta_{1n}, & \alpha_{2n}\lambda + \beta_{2n}, \dots, & \alpha_{nn}\lambda + \beta_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

а соответствующие  $\lambda_j$  значения  $C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{mj}$  из систем уравнений

$$\sum_{m=1}^k (\alpha_{mi} \lambda_j + \beta_{mi}) C_{mj} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Коэффициенты  $C_{mj}$  определяются с точностью до произвольного множителя  $D_j$ , т.е.  $C_{1j} = D_j K_{1j}, \dots, C_{mj} = D_j K_{mj}$ , где  $K_{1j}, \dots, K_{mj}$  – миноры элементов первой строки определителя (11). Полное решение системы (10) запишем в виде

$$T_m(t) = \sum_{j=1}^k D_j K_{mj} e^{\lambda_j t}. \quad (12)$$

Коэффициенты  $D_j$  определяются из начальных условий: при  $t = 0$ ,  $\rho(\xi, t) = \rho_0(\xi)$ .

При  $t = 0$  умножим (8) на  $[W_m(\xi)/W_{CT}(\xi)]d\xi$  и проинтегрируем от 0 до  $\infty$ :  $W_{CT}(\xi)$  – стационарное распределение для линейной задачи, которое получается из (9) полагая в нем  $m = ; L_0(\dots) = 1$ . Учитывая ортогональность  $W_m(\xi)$ , получим систему уравнений для  $D_j$

$$\sum_{j=1}^k D_j K_{mj} = \int_0^{\infty} W_0(\xi) L_m \frac{\xi^2}{2\sigma^2} d\xi - \int_0^{\infty} W_{CT}(\xi) L_m \left( \frac{\xi^2}{2\sigma^2} \right) d\xi \quad (m = 1, 2, \dots, k), \quad (13)$$

где  $W_0(\xi) = \frac{\xi^2}{\Delta^2(\xi)} \rho_0(\xi)$ .

Таким образом, нестационарное распределение амплитуды определяется соотношением

$$\rho(\xi, t) = \rho_{CT}(\xi) + \frac{\Delta^2(\xi)}{\xi^2} \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^k D_j K_{mj} e^{\lambda_j t} W_m(\xi). \quad (14)$$

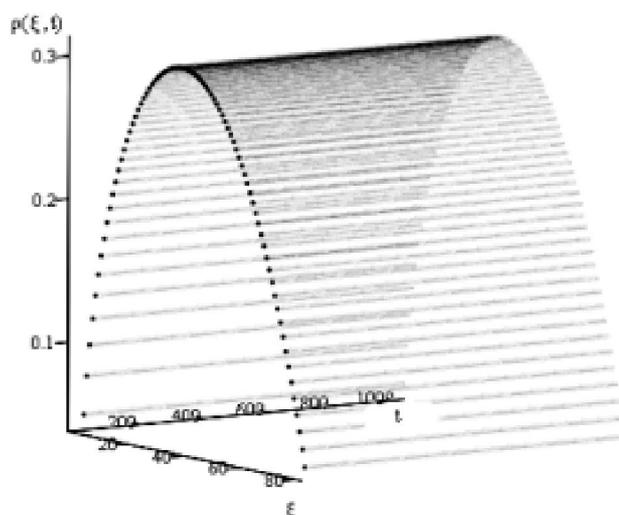
Значение  $W(\xi, t)$  из (14) можно получить с любой степенью точности в зависимости от числа  $k$ . Полученная функция распределения  $\rho(\xi, t)$  описывает эволюцию амплитуды колебания системы в переходном режиме. При  $t \rightarrow \infty$ ,  $\rho(\xi, t) \rightarrow \rho_{CT}(\xi)$ . Функция распределения  $\rho(\xi, t)$  является исчерпывающей статистической характеристикой основного параметра процесса колебания – амплитуды. Зная функцию распределения  $\xi$ , можно по элементарным формулам теории вероятности подсчитать первые два момента распределения  $\xi$ , а также оценить вероятность превышения амплитудой  $\xi$  заданного уровня. Таким образом, мы получаем все данные для оценки виброзащитных свойств системы и оценки вероятности ее вывода из строя. Весьма просто получается первое или второе приближение, если в уравнении (8) ограничиться только одним или двумя членами ряда.

Для второго приближения получим

$$\rho(\xi, t) = \rho_{CT}(\xi) + \frac{\Delta^2(\xi)}{\xi^2} \{ (C_{11} e^{\lambda_1 t} + C_{12} e^{\lambda_2 t}) W_1(\xi) - (\mu_1 C_{11} e^{\lambda_1 t} + \mu_2 C_{12} e^{\lambda_2 t}) W_2(\xi) \},$$

где  $\mu_1 = \frac{\alpha_{11} \lambda_1 + \beta_{11}}{\alpha_{21} \lambda_1 + \beta_{21}}$ ,  $\mu_2 = \frac{\alpha_{12} \lambda_2 + \beta_{12}}{\alpha_{22} \lambda_2 + \beta_{22}}$ ;  $C_{11} = \frac{\mu_2 b_1 + b_2}{\mu_2 - \mu_1}$ ,  $C_{12} = \frac{\mu_1 b_1 + b_2}{\mu_1 - \mu_2}$ .

$$b_1 = \int_0^{\infty} W_0(\xi) L_1(\xi) d\xi - \int_0^{\infty} W_{CT}(\xi) L_1(\xi) d\xi;$$



$$b_2 = \int_0^{\infty} W_0(\xi)L_2(\xi)d\xi - \int_0^{\infty} W_{CT}(\xi)L_2(\xi)d\xi, \quad W_0(\xi) = \frac{\xi}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

На рисунке построены графики для  $\rho(\xi, t)$  по выражениям (4) и (14) при  $n = 4$ ,  $a_1 = 6,25 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-3}$ ,  $a_2 = 1,421 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-3}$ ,  $\varepsilon = 0,006 \text{ с}$ ,  $g = 980 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ ,  $H = 300 \text{ см}$ .

По графикам можно определить динамические характеристики системы, а по выражениям (4) и (14) решить задачи оптимизации, надёжности, устойчивости и т.д.

#### ЛИТЕРАТУРА

Николаенко Н.А., Штоль А.Т. К статистическому анализу параметрических систем при случайных динамических воздействиях // Строительная механика и расчет сооружений. 1970. № 1. С. 4-9.

#### Резюме

Табанның кездейсоқ қозғалысынан болатын түзетілетін беттермен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған дененің стохастикалық әсердегі тербелмелі қозғалысы зерттелген. Түзетілетін беттермен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған дірілден қорғалатын дене қозғалысы ықтималдылығының таралу тығыздығы Фоккер – Планк – Колмогоровтың (ФПК) теңдеуі Бубнов – Галеркин әдісін қолданып, стационарлы және стационарлы емес жағдайы үшін анықталды.

#### Summary

In this paper the author researched the probability distribution function for the motion of a body on bearings with straightened surfaces in terms of rolling friction on relaxing soil. The function of density distribution has been determined using Fokker – Plank – Kolmagorov equation by means Bubnov – Galerkin of method.

**Keywords:** probability, distribution, function, motion, bearings, straightened, surfaces, friction, relaxing soil, equation, method.

УДК 531+539.376

КазНПУ им. Абая, г. Алматы

Поступила 11.05.10 г.