К. БИСЕМБАЕВ

КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА НА ОПОРАХ КАЧЕНИЯ СО СПРЯМЛЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ОСНОВАНИЯ (Часть 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ФПК)

(Представлена академиком НАН РК Г. У. Уалиевым)

Исследованы колебательные движения твердого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями при стохастическом воздействии. Используя методы теории Марковских процессов и методы усреднения стохастических дифференциальных уравнений получены уравнения Фоккера – Планка – Калмогорова (ФПК).

Исследованию нелинейных колебаний твердого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями с учетом трения качения на релаксирующих грунтах при случайных кинематических воздействиях посвящен ряд работ; например [1, 2].

В [1 и 2] анализируются случайные колебания виброзащищаемых тел на опорах качения со спрямленными поверхностями методом кумулянтного анализа и спектральным методом.

В данной статье, в отличие от работ [1, 2], рассматривается (излагается) методика вывода уравнения для функций плотности распределения вероятностей движения виброзащищаемого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями (уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК).

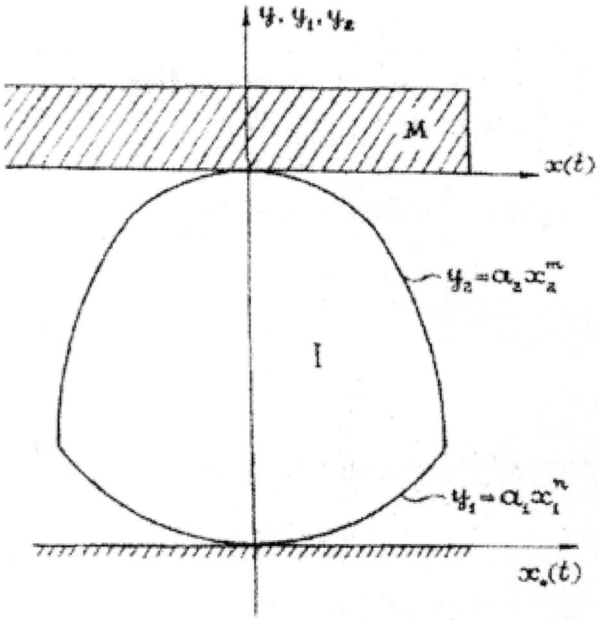
Схема виброзащитных устройств, основным элементом которой является опора качения, ограниченные поверхностями вращения высокого порядка показана на рисунке. Опора качения ограничена снизу и сверху поверхностями, заданными уравнениями $y_1 = a_1 x_1^{\,n}$ и $y_2 = a_2 x_2^{\,m}$ соответственно.

При $n = m$ уравнение движения тела на опорах качения со спрямленными поверхностями с учетом трения качения на релаксирующих грунтах имеет вид [3]:

$$\ddot{X} + \varepsilon \dot{\Phi}(X) + \Phi(X) - \omega_0^2 X = -\ddot{x}_0(t); \qquad (1)$$

где $X = (x - x_0)$, $\Phi(X) = \omega_0^2 N_n X^{\frac{1}{n-1}}$,

$$N_n = \frac{1}{(nH)^{\frac{1}{n-1}}} \left[\frac{1}{a_1^{\frac{1}{n-1}}} + \frac{1}{a_2^{\frac{1}{n-1}}} \right], \quad \omega_0^2 = \frac{g}{H};$$



$x_0(t)$ и $x(t)$ – соответственно горизонтальные смещения основания и верхнего тела, опирающихся на опору качения. X – перемещение тела на опорах качения относительно основания (рис.); ε –коэффициент затухания (период релаксации грунта); g – ускорение свободного падения; H – высота опоры. Воздействие $\ddot{x}_0(t)$ будем считать δ – коррелированный случайный процесс типа белого шума с интенсивностью S_0.

Введем новые обозначения $Y = \left(\frac{N_2}{N_n}\right)^{\frac{n-1}{n-2}} \cdot X$,

где $N_2 = \frac{a_1 + a_2}{2Ha_1a_2}$, $\mu = \varepsilon\omega_0$, $\tau = \omega_0 t$.

Уравнение (1) можно свести к уравнению в безразмерной форме

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} + \mu\dot{F}(Y) + F(Y) - Y = -q_0(t), \qquad (2)$$

где $q_0(t) = \left(\frac{N_2}{N_n}\right)^{\frac{n-1}{n-2}} \cdot \ddot{x}_0$, $F(Y) = N_2 Y^{\frac{1}{n-1}}$.

Для анализа уравнения движения виброзащищаемого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями можно воспользоваться методами теории диффузионных марковских процессов, поскольку в данных условиях процесс, описываемый векторами фазовых координат $\left(Y(\tau), \dot{Y}(\tau)\right)$, полностью определяется при $\tau \geq \tau_0$ вектором $\left(Y(\tau_0), \dot{Y}(\tau_0)\right)$ для любого момента времени τ_0.

Предположим, что μ – малый параметр, а правую часть уравнения (2) будем рассматривать как величину порядка μ.

Исследуем систему (2) методом усреднения в сочетании с методом марковских процессов. Для стохастических задач метод усреднения был применен П. С. Ландом и Р. Л. Стратоновичем [5], а Р. З. Хасьминский [6] дал строгий вывод зависимости для стационарной плотности вероятности энергии в квазиконсервативной системе на основании прямого усреднения уравнения ФПК. Чтобы воспользоваться основной теоремой об асимптотически марковских свойствах решения системы стохастических уравнений в стандартной форме, необходимо в уравнении (2) перейти к «медленным» переменным. Следуя [4], решение уравнения (2) можно представить в виде

$$Y = \xi \sin\psi; \quad \dot{Y} = \omega\xi \cos\psi. \qquad (5)$$

Следуя алгоритму, разработанному в работе [7], принимая в качестве новых переменных амплитуду ξ и фазу ψ, рассматривая выражение (5) как некоторую замену переменных, преобразуем уравнение движения (2) в систему двух уравнений первого порядка

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \mu\frac{\omega}{\Delta}F_\psi Y_\psi + \frac{1}{\Delta}Y_\psi q_0(\tau);$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \omega(\xi) - \mu\frac{\omega}{\Delta}F_\psi Y_\xi - \frac{1}{\Delta}Y_\xi q_0(\tau); \qquad (6)$$

где $\Delta = \left[Y_\xi \cdot Y_{\psi\psi} - Y_{\xi\psi} \cdot Y_\psi\right]\omega - \frac{d\omega}{d\xi}Y_\psi^2$.

Функция Δ зависит только от амплитуды ξ и имеет место соотношения

$$\Delta(\xi) = -\frac{n}{2(n-1)}\omega(\xi)\xi\left[1 - \frac{n-2}{n}\frac{1}{\omega^2(\xi)}\right];$$

$$\omega^2(\xi) = \left(\frac{N_2K_1}{\xi^{\frac{n-2}{n-1}}} - 1\right). \qquad (7)$$

Уравнения первого приближения для осредненной системы (6) имеют вид

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\tilde{\mu}\frac{\omega(\xi)\xi^{\frac{n}{n-1}}}{2\Delta(\xi)}+<\frac{\xi\cos\psi q_0(\tau)}{\Delta(\xi)}>,$$

$$\frac{d\psi}{d\tau}=\omega(\xi)-<\frac{\sin\psi q_0(\tau)}{\Delta(\xi)}>. \quad (8)$$

Представим флуктуационные члены уравнений (8) как сумму средних (m_1,m_2) и центрированных случайных составляющих (χ_1,χ_2):

$$G=<\frac{\xi\cos\psi q_0(\tau)}{\Delta(\xi)}>=m_1+\chi_1;$$

$$E=<\frac{\sin\psi q_0(\tau)}{\Delta(\xi)}>=m_2+\chi_2.$$

Коэффициенты интенсивности процессов χ_1 и χ_2 [8]

$$K_1=\int_{\infty}^{\infty}\langle G\cdot G_\tau\rangle d\tau=\frac{\xi^2}{2\Delta^2(\xi)}\cdot S_0;$$

$$K_2=\int_{\infty}^{\infty}\langle E\cdot E_\tau\rangle d\tau=\frac{1}{2\Delta^2(\xi)}\cdot S_0.$$

Величины m_1 и m_2 вычисляются по формулам [8]:

$$m_1=\int_{-\infty}^{0}<\frac{\partial G}{\partial\xi},G_\tau>d\tau+\int_{-\infty}^{0}<\frac{\partial G}{\partial\psi},$$

$$E_\tau>d\tau=\frac{1}{2}\frac{\xi}{\Delta(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi}{\Delta(\xi)}\right)+\frac{1}{\Delta(\xi)}\right]\cdot S_0;$$

$$m_2=\int_{-\infty}^{0}<\frac{\partial E}{\partial\xi},G_\tau>d\tau+\int_{-\infty}^{0}<\frac{\partial E}{\partial\psi},E_\tau>d\tau=0.$$

Укороченные уравнения с выделенными вибрационными функциями имеют следующий окончательный вид:

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\tilde{\mu}\frac{\omega(\xi)\xi^{\frac{n}{n-1}}}{2\Delta(\xi)}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\xi}{\Delta(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi}{\Delta(\xi)}\right)+\frac{1}{\Delta(\xi)}\right]\cdot S_0+\chi_1;$$

$$\frac{d\psi}{d\tau}=\omega(\xi)+\chi_2. \quad (9)$$

Для составления стационарного уравнения ФПК перейдем от (9) к соответствующему уравнению Ито

$$d\xi=\left\{\tilde{\mu}\frac{\omega(\xi)\xi^{\frac{n}{n-1}}}{2\Delta(\xi)}+\frac{1}{4}\frac{\xi}{\Delta(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi}{\Delta(\xi)}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\Delta(\xi)}\right]S_0\right\}d\tau+\frac{\xi}{\sqrt{2}\Delta(\xi)}\sqrt{S_0}\,d\eta(t);$$

$$d\psi=\omega(\xi)d\tau-\frac{\sqrt{S_0}}{\sqrt{2}\Delta(\xi)}d\eta(t). \quad (10)$$

где $\eta(t)$ – Винеровский процесс.

Укороченное уравнение для амплитуд (10) не содержит фазу $\psi(\tau)$. Нестационарное уравнение ФПК относительно плотности вероятности амплитуды $\rho(\xi,t)$, соответствующее укороченному уравнению движения (10), имеет вид

$$\frac{\partial\rho(\xi,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\left[\frac{\tilde{\mu}}{2\Delta(\xi)}\omega(\xi)\xi^{\frac{n}{n-1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{S_o}{4}\frac{\xi}{\Delta(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi}{\Delta(\xi)}\right)+\frac{S_0}{4}\frac{\xi}{\Delta^2(\xi)}\right]\rho(\xi,t)\right\}+$$

$$+\frac{S_0}{4}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{\xi^2}{\Delta^2(\xi)}\rho(\xi,t)\right]. \quad (11)$$

Аналогичное уравнение можно составить для функции $\rho(\psi,t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бисембаев К., Уалиев З.Г.* Динамическая устойчивость и статистический анализ колебаний твердого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями с учетом трения качения на релаксирующих грунтах // Тр. 8 Всерос. науч. конф. «Нелинейные колебания механических систем». Т. 2. 2008. С. 53-58.

2. *Бисембаев К.* Колебания твердого тела на опорах качения со спрямленными поверхностями с учетом трения качения при случайных воздействиях // Мат-лы 3 междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Т. 3. 2009. С. 93-97.

Бисембаев К. Колебания тела на опорах со спрямленными поверхностями // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1988. № 3. С. 65-69.

4. *Бісембаев К., П'ятецький В.О.* Дослiдження нелiнiйних коливань тiла на опорах кочення зіспрямленими поверхнями // Вiсник Киiвського унiверситету. Физ.-мат. науки. 1992. № 5. С. 12-17.

5. *Ланда П.С., Стратонович Р.Л.* К теории флуктуационных переходов различных систем из одного стационарного состояния в другое // Вестник МГУ. Сер. 3. 1962. № 1.

6. *Хосьминский Р.З.* О работе консервативной системы при воздействии малого трения и малого случайного шума // ПММ. 1964. Т. 28, № 5.

7. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

8. *Николаенко Н.А., Штоль А.Т.* К статистическому анализу параметрических систем при случайных динамических воздействиях // Строительная механика и расчет сооружений. 1970. № 1. С. 4-9.

Резюме

Түзетілетін беттермен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған қатты дененің стохастикалық әсердегі тербелмелі қозғалысы зерттелген. Марков процесі теориясы мен стохастикалық дифференциалдық теңдеулерді орталандыру әдістерін пайдаланып, Фоккер – Планк – Калмогоров (ФПК) теңдеулері алынды.

Summary

In this paper the author researched the probability distribution function for the motion of a body on bearings with straightened surfaces in terms of rolling friction on relaxing soil. The function of density distribution has been determined using Fokker – Plank – Kolmagorov equation by means of Bubnov – Galerkin method.

Keywords: probability, distribution, function, motion, bearings, straightened, surfaces, friction, relaxing soil, equation, method.

УДК 531+539.376

КазНПУ им. Абая, г. Алматы *Поступила 11.05.10г.*