

К.БИСЕМБАЕВ

## КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА НА ОПОРАХ СО СПРЯМЛЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ НА РЕЛАКСИРУЮЩИХ ГРУНТАХ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ И ВНЕШНЕМ ВОЗБУЖДЕНИИ. ЧАСТЬ 2

*(Представлена академиком НАН РК Г.У. Уалиевым)*

Исследованы нелинейные колебания твердого тела на опорах качения, несущие элементы которых имеют формы поверхностей высокого порядка с учетом трения качения на релаксирующих грунтах при воздействии одновременно горизонтальных и вертикальных возмущений. Изучен переходный режим и определен критерий устойчивости стационарного состояния системы.

Создание средств виброзащиты, использующих опоры качения, в настоящее время получило широкое распространение в транспортной технике и сейсмозащите сооружений. В статье исследованы нелинейные колебания виброзащитных систем с опорами качения со спрямленными поверхностями при воздействии одновременно горизонтальной и вертикальной составляющей сейсмических возмущений с учетом трения качения на релаксирующих грунтах. Модель кинематического фундамента показана на рис.1. Опора качения, ограничена снизу и сверху поверхностью, соответственно, уравнениями  $y_1 = a_1 x_1^n$ ,  $y_2 = a_2 x_2^n$ . Горизонтальное и вертикальное смещения оснований обозначим соответственно  $x_0(t)$  и  $y_0(t)$ . Через  $x(t)$  обозначим горизонтальное смещение верхнего тела, опирающегося на опору качения. Уравнения движения виброзащищаемого тела на опорах качения, ограниченных параболами высокого порядка, с учетом трения качения на релаксирующих грунтах при горизонтальном и вертикальном смещении основание, могут быть представлены в виде

$$\ddot{x} + \varepsilon \frac{d\Phi(x - x_0)}{dt} + \left(1 + \frac{\dot{y}_0}{g}\right) [\Phi(x - x_0) - \omega_0^2(x - x_0)] = 0 \quad (1)$$

где  $\Phi(x - x_0) = \omega_0^2 N_n (x - x_0)^{\frac{1}{n-1}}$ ;

$$N_n = \frac{1}{(nH)^{\frac{1}{n-1}}} \left[ \frac{1}{a_1^{\frac{1}{n-1}}} + \frac{1}{a_2^{\frac{1}{n-1}}} \right], \quad \omega_0^2 = \frac{g}{H} \quad (2)$$

$\varepsilon$  – коэффициент затухания (период релаксации грунта),  $g$  – ускорение свободного падения,  $H$  – высота опоры.

Рассматриваемая нами динамическая система при внешнем и параметрическом возбуждении  $x_0 = Q \sin pt$ ,  $y_0 = B \sin(2pt + \alpha)$  (3) описывается уравнением

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{\Phi}(x - x_0) + [1 - 4\lambda p^2 \sin(2pt + \alpha)] [\Phi(x - x_0) - \omega_0^2(x - x_0)] = 0 \quad (4)$$

Периодическое решение и нелинейный член уравнения (4) представим в виде

$$x = a_1 \sin pt + b_1 \cos t, \quad \Phi(x - x_0) = E \sin pt + D \cos pt, \quad (5)$$

где

$$E = \omega_0^2 N_n K_1 \frac{a_1 - Q}{[(a_1 - Q)^2 + b_1^2]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}},$$

$$D = \omega_0^2 N_n K_1 \frac{b_1}{[(a_1 - Q)^2 + b_1^2]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}},$$

$a_1 = a_1(t)$ ,  $b_1 = b_1(t)$  – медленно меняющиеся функции времени. Переходные колебательные режи-

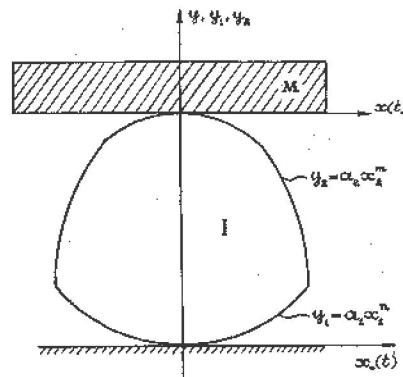


Рис.1 Схема опоры качения с опорными поверхностями высокого порядка

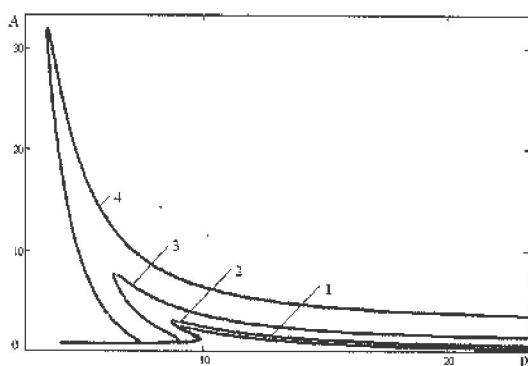


Рис.7. Резонансные кривые, при  
 $n=4, \varepsilon = 0.04c, Q = 0.9\text{cm}$ ,  
и различных значениях  $\lambda$

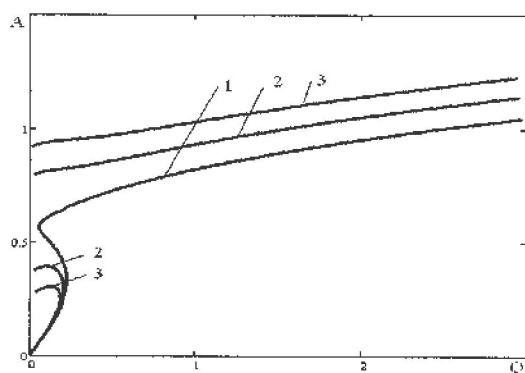


Рис.8. Амплитудная характеристика при  
 $n=4, \varepsilon = 0.006c, p = 15 \sqrt{\varepsilon^2}, Q = 0.9\text{cm}$   
и различных значениях  $\lambda$

мы исследуемой системы будут описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \frac{1}{p} \left\{ (p^2 - \omega_1^2) b_1 - \varepsilon p W_1 (a_1 - Q) + \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda p^2 \omega_1^2 (a_1 - Q) \cos \alpha + 2\lambda p^2 \omega_1^2 b_1 \sin \alpha \right\}, \\ \dot{b}_1 &= -\frac{1}{p} \left\{ (p^2 - \omega_1^2) (a_1 - Q) + \varepsilon p W_1 b_1 + p^2 Q - \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda p^2 \omega_1^2 (a_1 - Q) \sin \alpha + 2\lambda p^2 \omega_1^2 b_1 \cos \alpha \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

где  $W_1 = \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{[(a_1 - Q)^2 + b_1^2]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}}$ ,  $\omega_1^2 = W_1 - \omega_0^2$ . Для

стационарности решений системы необходимо, чтобы  $a_1$  и  $b_1$  были постоянными. Тогда

$$U(a_1, b_1) = (p^2 - \omega_1^2) b_1 - \varepsilon p W_1 (a_1 - Q) + 2\lambda p^2 \omega_1^2 C = 0; \quad (7)$$

$$V(a_1, b_1) = (p^2 - \omega_1^2) (a_1 - Q) + \varepsilon p W_1 b_1 + p^2 Q = 0;$$

$$\text{где } C = \sqrt{(a_1 - Q)^2 + b_1^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b_1}{a_1 - Q}. \quad (8)$$

Возведя в квадрат (7) и (8) и сложив результаты, получим уравнение

$$p^4 - \frac{2 \left( \omega_1^2 - \frac{\varepsilon W_1^2}{2} \right)}{1 - 4\lambda^2 \omega_1^4 - \frac{Q^2}{C^2}} p^2 + \frac{\omega_1^4}{1 - 4\lambda^2 \omega_1^4 - \frac{Q^2}{C^2}} = 0 \quad (9)$$

Уравнение (9) разрешается относительно  $p^2$ :

$$p^2 = \frac{\omega_1^2 - \frac{\varepsilon W_1^2}{2}}{1 - 4\lambda^2 \omega_1^4 - \frac{Q^2}{C^2}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[ \frac{\omega_1^2 - \frac{\varepsilon W_1^2}{2}}{1 - 4\lambda^2 \omega_1^4 - \frac{Q^2}{C^2}} \right]^2 - \frac{\omega_1^4}{1 - 4\lambda^2 \omega_1^4 - \frac{Q^2}{C^2}}}. \quad (10)$$

Из уравнений (7) и (8) можно получить следующие выражения:

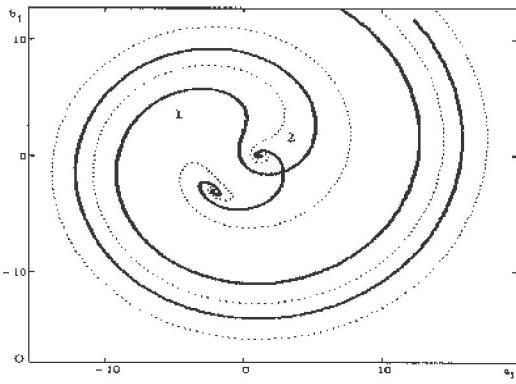
$$A_1 = \sqrt{\frac{4\lambda^2 p^4 \omega_1^4 C^2 + \varepsilon^2 p^2 W_1^2 Q^2 + \omega_1^4 Q^2 + 4\lambda p^2 \omega_1^2 C \varepsilon p W_1 Q}{(\omega_1^2 - p^2)^2 + \varepsilon^2 p^2 W_1^2}},$$

$$\text{где } A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}. \quad (11)$$

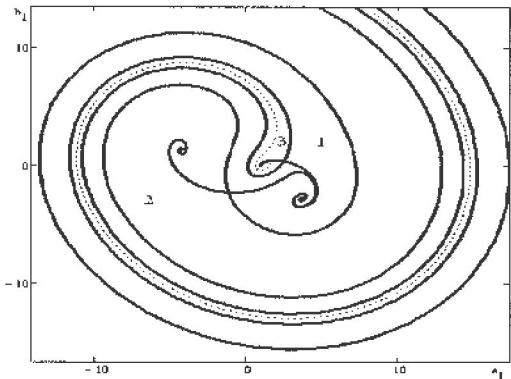
На рис.7 резонансные кривые построены по выражениям (10) и (11) при  $n = 4, \varepsilon = 0.04c, Q = 0.9\text{cm}$  и различных значениях  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.003, \lambda_3 = 0.007$ .

На рис.8 представлена амплитудная характеристика вынужденного колебания виброзащищаемого тела при  $n = 4, \varepsilon = 0.06c, p = 15 \sqrt{\varepsilon^2}, Q = 0.9\text{cm}$  и при  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.0006, \lambda_3 = 0.0009$ .

Анализ графиков, представленных на рис.7 и рис.8, приводит к следующим выводам. Параметрические воздействия расширяют резонансные зоны вынужденных колебаний виброзащищаемого тела. Амплитуда виброзащищаемого

Рис.9. Диаграмма на плоскости  $(a_1, b_1)$  $(n = 4, \varepsilon = 0.02c, Q = 0.9\text{ см},$ 

$$\lambda = 0, p = 8 \frac{1}{c^2}, \alpha = 0)$$

Рис.10. Диаграмма на плоскости  $(a_1, b_1)$  $(n = 4, \varepsilon = 0.02c, Q = 0.9\text{ см},$ 

$$\lambda = 0.02, p = 8 \frac{1}{c^2}, \alpha = 0)$$

$$+ \frac{n-2}{n-1} W_i \sin \alpha \cos \alpha + 2\lambda p^2 \omega_i^2 \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = -\varepsilon p W_i + \frac{n-2}{n-1} \varepsilon p W_i \cos^2 \alpha +$$

$$+ \frac{n-2}{n-1} W_i \sin \alpha \cos \alpha + 2\lambda p^2 \omega_i^2 \cos \alpha - \frac{n-2}{n-1} 2\lambda p^2 W_i \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial U}{\partial b_i} = (p^2 - \omega_i^2) + \frac{n-2}{n-1} \varepsilon p W_i \cos \alpha \sin \alpha + \frac{n-2}{n-1} W_i \sin^2 \alpha +$$
$$+ 2\lambda p^2 \omega_i^2 \sin \alpha - \frac{n-2}{n-1} 2\lambda p^2 W_i \sin \alpha;$$

$$\text{получим } h_1 = \frac{n}{n-1} \varepsilon p W_i + \frac{n-2}{n-1} \frac{4\lambda^2 p^4 \omega_i^2}{\varepsilon p} \quad (14)$$

$$h_2 = (p^2 - \omega_i^2) + \varepsilon^2 p^2 W_i^2 + \frac{n-2}{n-1} W_i (p^2 - \omega_i^2) -$$
$$- 4\lambda^2 p^4 \omega_i^2 \left( \frac{W_i}{n-1} - \omega_0^2 \right) -$$
$$- \frac{n-2}{n-1} 2\lambda p^2 W_i (p^2 \sin \alpha + \varepsilon p \omega_i^2 \cos \alpha) \quad (15)$$

Для реальных динамических систем с положительным демпфированием  $h_1 > 0$ , так что устойчивость определяется только  $\text{sgn } h_2$ . При условии

$$p > \omega_i, \quad \varepsilon^2 p^2 W_i^2 - 4\lambda^2 p^4 \omega_i^2 \left( \frac{W_i}{n-1} - \omega_0^2 \right) -$$
$$- \frac{n-2}{n-1} 2\lambda p^2 W_i (p^2 \tan \alpha + \varepsilon p \omega_i^2) \cos \alpha > 0.$$

объекта слабо зависит от амплитуды горизонтальных составляющих сейсмических воздействий. Параметрические возмущения (вертикальные составляющие сейсмических воздействий) не влияют на качества виброзащитных свойств опор качения со спрятленными поверхностями. Рассмотрим теперь устойчивость полученных решений. Для анализа устойчивости стационарных решений воспользуемся линеаризованными уравнениями в вариациях:

$$p \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial U}{\partial a_i} \xi - \frac{\partial U}{\partial b_i} \eta = 0, \quad p \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial V}{\partial a_i} \xi + \frac{\partial V}{\partial b_i} \eta = 0, \quad (12)$$

и соответствующим характеристическим уравнением

$$\chi^2 + h_1 \chi / p + h_2 / p^2 = 0,$$

где

$$h_1 = \left( \frac{\partial V}{\partial b_i} - \frac{\partial U}{\partial a_i} \right), \quad h_2 = \frac{\partial V}{\partial a_i} \frac{\partial U}{\partial b_i} - \frac{\partial V}{\partial b_i} \frac{\partial U}{\partial a_i} \quad (13)$$

Устойчивость соответствующего стационарного решения (или тип особой точки) уравнения (6) определяется знаком дискриминанта  $D_0 = p^2(h_1^2 - 4h_2)$ , и знаком выражений (13). После подстановки

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = (p^2 - \omega_i^2) - \frac{n-2}{n-1} \varepsilon p W_i \cos \alpha \sin \alpha +$$

$$+ \frac{n-2}{n-1} W_i \cos^2 \alpha - 2\lambda p^2 \omega_i^2 \sin \alpha;$$

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = \varepsilon p W_i - \frac{n-2}{n-1} \varepsilon p W_i \sin^2 \alpha +$$

Функция  $h_2$  положительна, следовательно, верхние ветви резонансных кривых соответствуют устойчивым (рис.7). На границе устойчивости имеет место следующие соотношения параметров системы

$$p = \omega_1, \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{2p} \frac{1}{\sqrt{1 - (n-1) \frac{\omega_0^2}{p^2} + (n-2) \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varepsilon p} + 1 \right)}} \quad (16)$$

Обратимся теперь к оценке влияния начальных условий. На рис.9 и рис.10 проведены результаты решения уравнения (6) для следующих параметров системы  $\varepsilon = 0,02c$ ,  $Q = 0,9cm$ ,  $\lambda = 0$ ,  $p = 8$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\lambda = 0,02$ .

В этом случае вся область начальных значений делится на две части. Тривиальное решение является нерезонансным, а нетривиальное решение резонансным. Имеются три особые точки: 1 и 3 – устойчивые фокусы, 2 – седло. Из сравнения представленных диаграмм видно, что с ростом  $\lambda$  область начальных условий, определяющая резонансные решения, увеличивается, в то время как область начальных условий,

определяющая нерезонансные решения, уменьшается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бисембаев К. Колебания тела на опорах со спрямленными поверхностями // Изв. АН КазССР. сер. физ.-мат. 1988. №3. с. 65-69.

2. Бисембаев К., П'ятницкий В. О. Дослідження нелінійних коливань тіла на опорах кочення зі спрямленими поверхнями // Вісник Київського Університету. Физ.-мат. Науки. №5. с.12-17.

#### Резюме

Түзетілгін беттермен шектелген тенсеммелі тірекке орнатылған дененің, релаксацияланатын жер қабатындағы домалау үйкелісін ескерген жағдайдағы горизонталь және вертикаль ауытқудың әсерінен болатын сызықты емес тербелісі зерттелген. Жүйенің етпелі режимі зерттелді және стационар құйінін орнықтылық критерийі анықталды.

#### Summary

Nonlinear oscillations of solids on bearing, bearers of which have forms of high order surfaces have been investigated. Transitional regime has been examined and criterion for stability of stationary condition of the system has been determined.

Казахский Национальный

Педагогический Университет им. Абая,

г. Алматы

Поступила 12.04.2010 г.