УДК 517.96.43

*Н. К. БЛИЕВ, К. М. ИДИРИСОВ*

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Получены условия разрешимости в $L_p$, $p>2$, и аналитическое выражение решения неэллиптического одного модельного двумерного сингулярного интегрального уравнения. Такие интегральные уравнения являются существенным инструментом в изучении эллиптических и эллиптико-гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных от двух независимых переменных.

Рассмотрим следующее сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)\varphi(z)-b(z)(S\varphi)(z)=g(z),\quad z\in G, \qquad (1)$$

где $G$ – единичный круг $\{|z|<1\}$ в комплексной плоскости $E$; коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ – заданные функции из $C(\overline{G})$, удовлетворяющие в замкнутом круге $\overline{G}$ условию

$$|a(z)|<|b(z)|,\quad |a(z)|\neq 0. \qquad (2)$$

Правая часть уравнения (1) $g(z)\in L_p(G)$, $p>2$. Неизвестную функцию $\varphi(z)$ ищем также из $L_p(G)$, $p>2$. В случае, когда $|a(z)|>|b(z)|$ безусловная и однозначная разрешимость в $L_p$, $|p-2|<\varepsilon$ была установлена И. Н. Векуа [1] на основе принципа сжатых отображений.

Сингулярные интегралы

$$(S\varphi)(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\varphi(\varsigma)}{(\varsigma-z)^2}d\xi\,d\eta,$$

$$(\overline{S}\varphi)(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\varphi(\varsigma)}{(\overline{\varsigma}-\overline{z})^2}d\xi\,d\eta,$$

$$z=x+iy,\quad \varsigma=\xi+i\eta$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши, являются ограниченными операторами в $L_p(G)$, $p>1$ [1] (см. также [2, 3]).

Сингулярные интегральные уравнения относительно $S\varphi$ и $\overline{S}\varphi$ находят широкое применение в изучении эллиптических и эллиптико- гиперболических дифференциальных уравнений и систем от двух независимых переменных [2–4]. Двумерное сингулярное интегральное уравнения в различной постановке рассмотрены в работах И. Н. Векуа [1], В. С. Виноградова [5], И. И. Комяка [6–8], А. Д. Джураева [4], Н. К. Блиева [9].

Известно [7], что интегральный оператор

$$(N\varphi)(z)=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\varphi(\varsigma)}{(1-\varsigma\overline{z})^2}d\xi\,d\eta,$$

действующие в пространстве $L_p(G)$, $p>1$, является в нем линейным ограниченным оператором и имеет место соотношение

$$(\overline{S}S\varphi)(z)=\varphi(z)-(N\varphi)(z). \qquad (3)$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\varphi(z)-b_1(z)(S\varphi)(z)=g_1(z), \qquad (4)$$

где $b_1(z)=\dfrac{b(z)}{a(z)}$, $g_1(z)=\dfrac{g(z)}{a(z)}$. Ясно, что $b_1(z)\in C(\overline{G})$, $g_1(z)\in L_p(G)$, $p>2$.

Из (3) имеем

$$\varphi(z)=(\overline{S}S\varphi)(z)+(N\varphi)(z),$$

и подставляя в уравнение (4), получим

$$(\overline{S}S\varphi)(z)+(N\varphi)(z)-b_1(z)(S\varphi)(z)=g_1(z). \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь функцию $\psi(z)$, определенную в $G$ следующим образом:

$$(S\varphi)(z)=\psi(z), \qquad (6)$$

где $\varphi(z)$ – искомое решение уравнения (5). Заметим, что $\psi(z)\in L_p(G)$, $p>2$. Известно [4, с. 90], что для разрешимости сингулярного интегрального уравнения (6), необходимо и достаточно, чтобы его правая часть $\psi(z)$ удовлетворяла условиям:

$$\iint_G\overline{\varsigma}^k\psi(\varsigma)d\xi\,d\eta=0,\quad k=1,2,... \qquad (7)$$

где $\varphi_k(z)=\overline{z}^k$, $k=1,2,...$ линейно независимые решения уравнения

$$(S\varphi)(z) = 0.$$

Тогда из (6) получим

$$\varphi(z) = \overline{\Phi'(z)} + (\overline{S}\psi)(z), \qquad (8)$$

где $\Phi(z)$ – произвольная голоморфная в круге $G$ функция [4, с. 89].

При этом интегральный оператор $(N\varphi)(z)$ имеет вид

$$(N\varphi)(z) = (N\overline{\Phi'})(z) + (N\overline{S}\psi)(z) = (N\overline{\Phi'})(z), \quad (9)$$

так как $(N\overline{S}\psi)(z) = 0$ [7].

Подставляя (6) и (9) в уравнение (5), получим

$$(\overline{S}\psi)(z) + (N\overline{\Phi'})(z) - b_1(z)\psi(z) = g_1(z),$$

или

$$\psi(z) - q(z)(\overline{S}\psi)(z) = f(z), \qquad (10)$$

где

$$f(z) = \frac{a(z)(N\overline{\Phi'})(z) - g(z)}{b(z)} \in L_p(G), p > 2,$$

$q(z)$ – непрерывная в замкнутом круге $\overline{G}$ функция, удовлетворяющая условию

$$|q(z)| = \left|\frac{a(z)}{b(z)}\right| \le const < 1. \qquad (11)$$

Уравнения (10), (11) принадлежат классу двумерных сингулярных интегральных уравнений, изученных И.Н. Векуа [1]. Норма оператора $\overline{S}$ в $L_p(G)$ совпадает с нормой оператора $S$, то в силу (11) существует оператор $(I - q\overline{S})^{-1}$ в $L_p(G)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$, и тогда умножая (10) слева на $(I - q\overline{S})^{-1}$, получим,

$$\psi(z) = (I - q\overline{S})^{-1} f(z) =$$

$$= (I - q\overline{S})^{-1}\left(\frac{a(z)(N\overline{\Phi'})(z) - g(z)}{b(z)}\right). \qquad (12)$$

Тогда (8) имеет вид

$$\varphi(z) = \overline{\Phi'(z)} +$$

$$+ \overline{S}(I - q\overline{S})^{-1}\left(\frac{a(z)(N\overline{\Phi'})(z) - g(z)}{b(z)}\right). \qquad (13)$$

Таким образом, если решение (12) сингулярного интегрального уравнения (10) удовлетворяет условиям (7), то функция (13) является решением уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА


1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1987.

2. *Зигмунд А., Кальдерон А.* On existence of certain integrals // Acta Math. 1952. V. 88. P. 85-139.

3. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. ФМЛ, 1962.

4. *Джураев А.Дж.* Метод сингулярных интегральных уравнений. М., 1987.

5. *Виноградов В.С.* О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения // ДАН СССР. 1978. Т. 241. № 2. С. 272-274.

6. *Комяк И.И.* О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения // ДАН СССР. 1980. Т. 250. № 6.

7. *Комяк И.И.* Условия нётеровости и формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений по круговой области // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 2. С. 328-343.

8. *Комяк И.И.* Об одном классе двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Бергмана // ДАН БССР. 1979. Т. 23. № 1.С. 8-11.

9. *Блиев Н.К.* О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения // Докл. НАН РК. 2007. №3. С. 8-12.



**Резюме**

Екі өлшемді бір ерекше интегралдық теңдеудің $L_p, p > 2$, кеңістігінде шешімді болу мәселелері зерттелген. Жұмыстың зерттеу тәсілі күрделірек жағдайларда да қолданыс табады.

**Summary**

In this paper, we stady a solvability in $L_p, p > 2$, of one two – dimensional singular integral equation. The metode of paper is suitable for the more general cases.


*Институт математики МОН РК* *Поступила 02.02.09г.*