

М.М. БУРАКОВ¹

СООТНОШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ДВИЖЕНИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД, ЕГО ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. Ст. III

Сүзілу заңындағы – жерасты сұларының қозғалысының сүзілу физика-математикалық үлгісі туралы қазіргі көзқарас қарастырылған.

Рассматриваются современные представления об уравнении движения в фильтрационной физико-математической модели движения подземных вод – законе фильтрации

Modern representations about the movement equation in filtration physical and mathematical model of movement of underground waters-laws of a filtration are considered.

Как мы уже отмечали [16, 17], наиболее общим подходом к описанию и исследованию движения жидкости является построение феноменологической макроскопической теории. Известно, что с увеличением числа отдельных микродвижений, составляющих макроскопическое, начинают проявляться суммарные статистические закономерности, соответствующие течению в целом и не справедливые для движения, например, одной или нескольких молекул. Такими свойствами обладают системы с большим числом элементов, слабо связанных между собой [8, 9, 39, 50]. Подобные системы могут быть описаны как некоторые сплошные среды.

В этом случае свойства проводящей среды и скорость течения осредняются по некоторому объему пространства, характерный размер которого используется в качестве масштаба осреднения. Каждому масштабу осреднения соответствует своя модель течения (одна или несколько), обладающая своей понятийной базой, своими гидродинамическими особенностями и требованиями к экспериментальному определению параметров.

В макрообъеме статистически однородного геологического тела выделяется несколько характерных размеров; приближение процесса движения подземных вод (ПВ) и его моделей осу-

ществляется по одному из следующих масштабов осреднения [7, 13, 16, 17]:

$$l_{\min} \ll l_n \ll l_v, \quad (1)$$

где l_{\min} – минимальный характерный размер объема вязкой слабо сжимаемой жидкости, для которого еще справедлив феноменологический подход к описанию ее течения; l_n – характерный размер проводящей среды, позволяющий схематизировать течение воды в системе сообщающихся пор или трещин моделью ее движения в идеализированной сплошной среде (насыщенной и ненасыщенной); l_v – характерный размер области фильтрации или ее части.

Одной из самых спорных и мало исследованных с точки зрения соответствия масштабу осреднения течения проблем фильтрационной модели является обоснование уравнения движения ПВ.

В 1856 г. французский инженер-гидротехник А. Дарси опубликовал результаты своих экспериментальных исследований фильтрации воды через пористую среду (в экспериментах использовался песок). Варьируя перепадом давлений Δp на концах горизонтальной трубы поперечным сечением ω , заполненной песком, при постоянной длине образца пористой среды ΔL , и длиной этого образца при постоянном Δp , он установил, что

¹ Казахстан. 050100, г. Алматы, ул. Ч. Валиханова, 94. Институт гидрогеологии и геоэкологии им. У.М. Ахмедсафина

“... объем воды, который протекает через слой песка с данными свойствами, пропорционален давлению и обратно пропорционален толщине слоя песка” (цитируется по [11]), иными словами

$$q = \omega K \frac{\Delta p}{\Delta L}, \quad (2)$$

где q – объемный расход потока воды; K – коэффициент пропорциональности для зависимости

$\frac{q}{\omega} \equiv v = f\left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)$; v – скорость фильтрации. Коэффициент пропорциональности в выражении (2) есть уже характеристика проводящей среды – коэффициент фильтрации. Так, эмпирическим путем А. Дарси вывел линейный закон фильтрации, получивший впоследствии его имя.

Использованный в этих экспериментальных исследованиях методический подход и способ интерпретации их результатов, строго говоря, не были оригинальными. Как верно отмечает А.Е. Гуревич [22], Дарси шел по уже проторенной дороге – к 1856 г. были открыты основные законы переноса: в 1822 г. – закон Фурье для потока тепла; в 1827 г. – закон Ома для потока электричества; в 1855 г. – по аналогии с законом Фурье был постулирован закон Фика для диффузионного потока. Тем более что у Дарси была прямая аналогия в виде вытекающего из указанных законов выражения для течения жидкости в тонких трубах, установленного в 1839–1841 гг. Пуазейлем и Гагеном.

Эти и подобные им законы, выявленные на основе эмпирически установленных связей между наблюдаемыми величинами (в нашем случае между потоком воды и движущей силой), называются феноменологическими [7, 8, 9, 39, 50, 57]. Важнейшей особенностью таких законов является то, что построение их формально совершенно безразлично к природе описываемого процесса, оно вообще не использует какие-либо представления о внутренней сущности явления: для фильтрационного потока, например, было установлено только – для любого образца проводящей среды q пропорционален . Изучение процессов переноса подобным образом является предметом феноменологической термодинамики неравновесных процессов [22, 39, 57].

Вместе с тем, к настоящему времени экспериментально установлено, что во многих слу-

чаях прогнозы фильтрации с использованием моделей, базирующихся на линейном уравнении движения жидкости, не оправдываются (в частности, при малых, близких к естественным, градиентах давления и скоростях течения, и, наоборот, при больших, существенно превышающих естественные, градиентах и скоростях). Значительно раньше эта проблема стала при проектировании разработки нефтяных месторождений – нелинейность закона фильтрации при малых градиентах давления является одной из основных причин формирования застойных зон в краевых частях областей влияния нефтяных скважин, а, следовательно, снижения нефтеотдачи продуктивных пластов. С другой стороны, в эксплуатационных скважинах снижение давления, необходимого для достижения заданного отбора нефти, оказывалось существенно большим, чем это следовало из теории; этот эффект связывается обычно с проявлением инерционных сил, также определяющих нелинейность закона фильтрации, только при больших градиентах и скоростях течения. Очевидно, что и основные результаты теории нелинейной фильтрации получены применительно к добыче нефти.

В расчетах отбора ПВ и дренажа территории обычно оценивается либо максимальное снижение давления (уровня ПВ) в наиболее нагруженной части (точке) водоносного пласта при заявленном водоотборе, либо минимальное снижение уровня на заданном расстоянии от дрены. Основное отличие таких расчетов – построение применительно к системам, запасы воды в которых в силу ее круговорота постоянно возобновляются. Питание ПВ берется как стохастическая величина, имеющая некоторую произвольно определенную вероятность и существенно огрубляющая расчеты, так что вроде бы отпадает необходимость учета еще и нелинейности закона фильтрации при малых градиентах давления (правда в любом случае обязательным остается учет нелинейности закона фильтрации при больших градиентах и скоростях). Однако уже в рамках такого подхода многие исследователи считают его обязательным для уточнения расхода потоков ПВ, перетока их через слабо проницаемые отложения.

Сложившееся положение нельзя признать удовлетворительным, так как расчеты фильтрации ПВ при подобном подходе строятся на базе

моделей, содержащих систематические погрешности, величина и знак которых неизвестны. Соответственно большое значение приобретает практическая реализация теоретических построений о течении ПВ при критических градиентах давления в направлении обоснования критерииев применимости закона Дарси, построения методических приемов оценки фильтрационных параметров. А необходимость учета нелинейности закона фильтрации связывается и с другими "традиционными" задачами: анализом закономерностей водоотбора и дренажа; уточнением условий взаимодействия выработок и т.п. [3, 5, 6, 11].

Анализ системы определяющих уравнений (уравнений неразрывности, движения и состояния) в фильтрационной модели показывает, что закон фильтрации (уравнение движения) не следует из самой фильтрационной модели, он должен быть в ней задан. Весьма показателен в этом плане пример попытки термодинамического обоснования закона фильтрации, предпринятой А.В. Костериным [23]. Им диссипация энергии в единице объема пористой среды представлена в виде

$$\Phi = p_i \vec{v}_i, \quad (3)$$

где $p_i = (-\nabla P)$; P – среднее давление жидкости на единицу площади пористой среды; ∇ – оператор Гамильтона.

Билинейная форма (3) с точностью до постоянного множителя, равного абсолютной температуре, совпадает с производством энтропии. При этом p_i и \vec{v}_i предлагается считать термодинамическими силами и потоками соответственно.

Автор [23] сам обращает внимание на то, что различные варианты термодинамической теории приводят к различным формам закона фильтрации, иными словами, выбор вида уравнения движения ПВ целиком определяется произволом исследователя. Для объективизации выбора необходима критериальная оценка, в качестве которой по нашему мнению безальтернативно может быть использовано экспериментальное установление вида закона фильтрации. А если оно проделано, т.е. закон фильтрации установлен, есть ли необходимость его еще и термодинамического обоснования? С этой точки зрения выражение (3) представляет собой лишь наиболее обобщенную запись уравнения движения жидкости в пористой среде, и именно как обобщение его и следует рассматривать, не пытаясь с его помощью обосновывать вид этого уравнения.

Такой подход к обоснованию закона фильтрации, строго говоря, не может считаться оригинальным. Например, ранее в [1, 22] рассматривалась очень простая интерпретация линейного закона фильтрации.

Вообще же некоторые сведения о законе фильтрации можно получить, исходя из самых общих представлений [8, 9].

Выделим, как и в [8], вокруг точки пористой среды некоторый элементарный объем; поле скоростей фильтрации в этом объеме, как уже указывалось ранее, можно считать непрерывным, а все параметры среды и жидкости – постоянными. Нельзя пренебречь только изменением давления (определенным его градиентом), как бы мало оно не было, поскольку при постоянном по пространству давлении (термодинамическая сила из (3) равна нулю) движение жидкости полностью отсутствовало бы. Отсюда следует основное предположение при установлении вида закона фильтрации. Оно состоит в том, что вектор скорости фильтрации в выбранной точке определяется свойствами жидкости, пористой среды и градиентом давления [8]:

$$\vec{v} = -c \operatorname{grad} p, \quad (4)$$

где c – некоторая скалярная величина, зависящая от модуля вектора скорости v и учитывающая свойства жидкости и проводящей среды. Остальные обозначения прежние.

Пористая среда может быть охарактеризована геометрическими параметрами – характерным размером l_n , активной пористостью n , безразмерными показателями кривой распределения пор по размерам $f(n)$ и др. В систему определяющих величин включаются также такие параметры жидкости, как плотность ρ и вязкость η , входящие в уравнения количества движения (следствием этих уравнений и должен быть закон фильтрации). Вместе с тем, параметр r , характеризующий состояние жидкости и представляющий инерционную составляющую движения, можно исключить из числа определяющих вследствие исключительно малых скоростей движения ПВ.

Анализ размерностей этих величин, выполненный в работах [8, 9], позволил установить, что

$$c = \frac{l_n^2}{\eta f(n)}. \quad (5)$$

С учетом (5) уравнение (4) преобразуется к виду

$$\vec{v} = -\frac{k}{\eta} \operatorname{grad} p, \quad k = \frac{l_n^2}{f(n)}, \quad \vec{v} = -K \operatorname{grad} H. \quad (6)$$

Здесь k – как и прежде, проницаемость среды, имеющая размерность площади; она не зависит от свойств жидкости и представляет собой геометрическую характеристику пористой среды; H – гидростатический напор (высота столба воды в назначеннной точке пористой среды относительно плоскости сравнения). Остальные обозначения прежние.

Тот факт, что масштабы осреднения течения и их соотношение вида (1) не являются классификационными признаками (т.е. то, что одна модель движения ПВ не следует из другой, не является ее суммой), позволяет сделать заключение о нецелесообразности многочисленных попыток получить закон фильтрации путем осреднения уравнений Навье–Стокса; такая попытка предпринята, например, в [61]. Любой такой вывод сводится в итоге к попытке вычислить проницаемость по известной (или произвольно заданной) геометрической структуре пористой среды [8]. А в этом случае возникает то самое противоречие, заставляющее переходить от физического описания движения ПВ к фильтрационной феноменологической модели. Реально на практике это противоречие реализуется принципиальной невозможностью оценить геометрическую структуру проводящей среды, оперируя традиционно используемыми в гидрогеологии средствами изучения водоносных систем (скважинами и другими горными выработками).

Кроме того, в систему уравнений Навье–Стокса, определяющую физическое описание движения ПВ, как и в фильтрационную модель, входит свое уравнение движения; его также необходимо в эту систему задавать. Поэтому даже если удалось бы каким-то образом реализовать оценки геометрической структуры среды, то полученное выражение “закона фильтрации” целиком определялось бы видом этого уравнения движения, т.е. проблема обоснования закона фильтрации не исчезла бы, а возникла на другом уровне описания фильтрации. Некоторые модели и обзоры моделей, в которых анализируется связь проницаемости с геометрией пористой среды, представлены в работах [19, 30–32, 41–44, 59–61] и др.

Ранее уже подчеркивалось, что линейный закон фильтрации имеет широкую область приложений; на его основе получены основные результаты теории фильтрации. Существуют и ограничения его применения; к настоящему времени экспериментально твердо установлено – линейный закон нарушается в областях больших и малых скоростей движения жидкостей через пористые среды. Кроме того, при весьма кратковременном возбуждении водоносного пласта начинают проявляться релаксационные процессы, также обусловливающие отклонения реальной фильтрации от закона Дарси [14]. Несоблюдение принципов осреднения течения и в этих случаях вносит противоречия в понятийную базу существующих разновидностей (гидромеханической и гидравлической) фильтрационных моделей.

Уравнение движения ПВ при больших скоростях представляется в виде

$$\operatorname{grad} H = -\frac{1}{K} \vec{v} - \frac{\nu}{C^2} \vec{v} \quad (7)$$

(здесь C – константа, остальные обозначения прежние), где второе слагаемое обуславливает потери напора от действия сил инерции. Выражение (7), носящее название двучленного закона фильтрации, впервые предложено Форхгеймером (*Forchheimer*) [56]. Справедливость его и хорошая согласованность с данными экспериментальных и натурных наблюдений установлены многочисленными исследованиями [2, 8, 19, 24–26, 37, 43, 44, 53–55, 58, 59, 61, 64, 65].

Большое число публикаций посвящено выяснению физического смысла соотношения (7), из которых необходимо упомянуть статьи В.М. Насберга [37], Е.М. Минского [25, 26], С.А. Христиановича [58] и более поздние работы [8, 9, 19, 53, 64]. Однако наиболее простым и корректным представляется обоснование двучленного закона фильтрации, данное в [8], – формула (7) совпадает с первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора функциональной зависимости между параметрами фильтрационного потока и проводящей среды вида (6), построенной при помощи π -теоремы теории размерности.

Второе слагаемое в правой части выражения (7) формально совпадает с законом Шезин–Краснопольского движения жидкости в порах или трещинах. С опорой на это формальное совпадение появление квадратичного члена в уравнении

закона фильтрации часто связывают с инерционной составляющей сопротивления движению жидкости, а точнее – с турбулизацией течения. И если обозначение второго слагаемого в правой части (7) как инерционная составляющая сопротивления движению возражений не вызывает, то феноменологическая фильтрационная модель течения жидкостей в проводящих средах исключает представление о турбулизации течения; в отдельных порах или трещинах при больших градиентах давления движение может быть турбулентным, однако для элементарного объема проводящей среды течение остается потенциальным [16, 17] (т.е. безвихревым), но с иным, в сравнении с законом Дарси, механизмом обмена количеством движения. В подтверждение этому Г.И. Баренблatt [8] показал, что уже порядок чисел Рейнольдса, рассчитанных по диаметру зерен или пор проводящей среды, при которых сказываются отклонения от линейной зависимости $\bar{v} = f(\text{grad } p)$, указывает на неправомерность рассмотрения течения при больших градиентах давления как турбулентного. Отсутствие турбулентности, т.е. флуктуаций скорости фильтрации во времени, доказано также прямыми опытами [64].

Первые опытные исследования фильтрации воды в пористых средах при малых градиентах давления (напора), по-видимому, принадлежат Кингу (*King*) [62]. Его выводы о нарушении линейного закона с уменьшением градиентов позже подтвердились многочисленными экспериментами; результаты и обзоры их приведены в работах [3, 5, 6, 8, 11, 21, 38, 63] и др., – причем Скавиньский (*Skawicki*) [63] экспериментально показал нарастание отклонения от линейного закона с увеличением размеров зерен фильтрующей среды. Надо отметить, что часть исследователей вообще отрицает возможность отклонения фильтрации от закона Дарси, пытаясь объяснить зарегистрированные в опытах фильтрационные аномалии либо погрешностями измерений и вычислений, либо проявлениями каких-то (сопутствующих фильтрации) физических процессов [12, 42].

Существенно подчеркнуть следующее. Фильтрационные аномалии при малых градиентах напора исследовались до сих пор, главным образом, в глинистых грунтах, в рыхлых же крупнозернистых отложениях (в песке и т.п.) практи-

чески не рассматривались. Из литературы известны лишь опыты Скавиньского [63] по исследованию закономерностей фильтрации различных растворов через искусственные проводящие среды (кварцевые зерна), близкие к однородным мелко-, средне-, крупнозернистым пескам и гравию, и опыты И.Б. Муратова и М.А. Саттарова [36] в образцах неоднородного песка с большим содержанием глинистых частиц.

В результате этих экспериментов возникли дополнительные проблемы с их интерпретацией. Так, вынос глинистых частиц, по мнению А.Г. Арье [5], является причиной погрешности экспериментов, результаты которых приведены во второй названной статье, выражающейся неоднородностью фильтрационных свойств пористой среды в области сравнительно больших градиентов. Однако аналогичная интерпретация похожего графика зависимости экспериментально определенного коэффициента фильтрации K от градиента напора I для опытов Скавиньского принципиально не применима, так как им использовались искусственные фильтрующие среды (стеклянные и кварцевые зерна) и параметры этих сред в процессе исследований не менялись.

Поэтому автором совместно с И.И. Гринбаумом для проверки гипотезы о нарушении линейного закона фильтрации в песке были осуществлены эксперименты, в ходе которых проводились наблюдения за скоростью фильтрации при малых градиентах напора [18]. Опыты выполнялись в фильтрационном приборе (рис. 1), представляющем собой вертикальную цилиндрическую трубу (1) с внутренним сечением $\omega = 0,312 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, длиной 0,620 м и базой пьезометров $l = 0,510 \text{ м}$. Постоянство фильтрационного потока и показаний пьезометров (2) достигалось поддержанием стабильности уровней воды в верхней (3) и нижней (4) напорных колонках. Расход воды, проходящей через песок, на протяжении каждого опыта определялся объемным способом – по времени наполнения мерной емкости (5). Опыты выполнялись в изотермических условиях при температуре воды в $20 \pm 0,5^\circ\text{C}$.

В ходе экспериментов модуль вектора скорости фильтрации v в диапазоне изменения градиента напоров 0,009–1,700 с предельно допустимой относительной погрешностью $\delta_v \leq 1\%$ вычислялся по формуле:

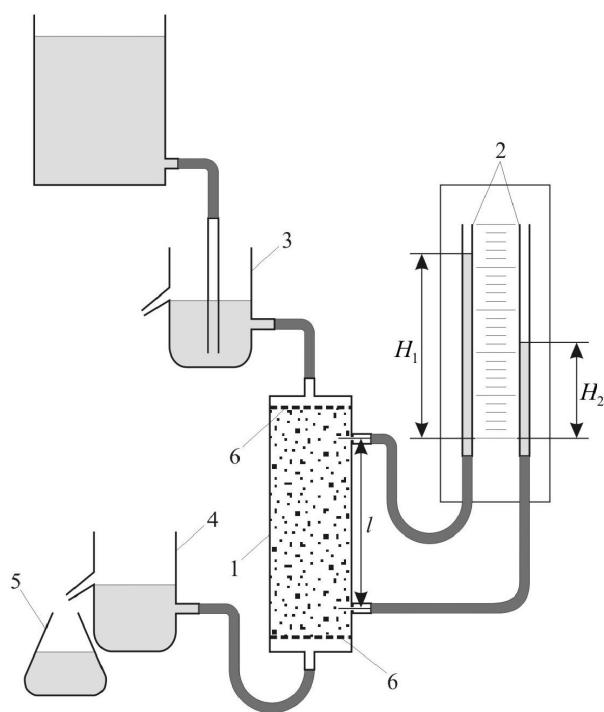


Рис. 1. Схема лабораторной установки для исследования течения воды в песке при малых градиентах давления.
Обозначения см. в тексте

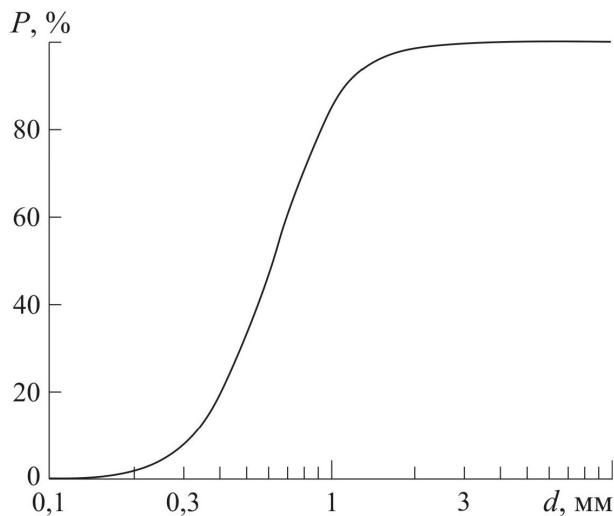


Рис. 2. Интегральная кривая гранулометрического состава песка

$$\nu = \frac{Q}{\omega},$$

где \$Q\$ – расход потока воды, проходящей через прибор.

На протяжении каждого опыта значение расхода считалось представительным, если после стабилизации уровней воды в пьезометрах совпа-

дали величины не менее трех замеров подряд. При этом использовались мерные емкости (\$92 \pm 0,5\$ и \$260 \pm 0,5\$ см\$^3\$), предельная относительная погрешность замера объема воды \$V\$ по которым \$\delta_V\$ не превышала 0,6 %. Эти емкости обеспечивали продолжительность их наполнения (при предельно допустимой погрешности отсчета времени по одному и тому же секундомеру в 0,2 с): первая в интервале градиентов напора 0,009–0,030 соответственно \$\sim 66\$–18 мин; вторая в интервале градиентов напора 0,030–1,700 соответственно \$\sim 50\$–0,9 мин.

Модули градиентов напора оценивались как разность показаний пьезометров (отсчет осуществлялся с точностью до 0,2 мм), отнесенная к их базе:

$$I = \frac{H_1 - H_2}{l}.$$

Предельно допустимая относительная погрешность \$\delta_I\$ оценок градиентов не превышала 10 %.

Эффективные (текущие) значения коэффициента фильтрации \$K\$ рассчитывались на основе установленных опытным путем величин \$\nu\$ и \$I\$:

$$K = \frac{\nu}{I}.$$

Песок, загруженный в фильтрационный прибор, для устранения возможного выноса потоком воды частиц был тщательно отмыт от мелкозернистых (преимущественно глинистых) фракций, на рис. 2 показан его гранулометрический состав. В фильтрационном приборе он надежно фиксировался с помощью пробок (6), изготовленных из металлической сетки. Через песок фильтровалась предварительно прокипяченная природная вода с минерализацией \$\sim 0,3\$ г/дм\$^3\$, чем достигалось более полное соответствие экспериментов реальным условиям течения жидкости в пористой среде, а также исключалось возможное влияние на результаты опытов растворенных в воде газов.

В процессе экспериментальных исследований было осуществлено 40 серий опытов (2–4 опыта в каждой), причем последовательность серий строилась как в порядке возрастания, так и в порядке убывания градиентов напора. Такое количество опытов в серии и относительно большое время проведения каждого из них обеспечивало существенное превышение продолжительности эксперимента над временем релакса-

ции вязкости. Последнее контролировалось совпадением опытных величин скоростей фильтрации в серии. При этом повторение в разных сериях одинаковых условий проведения опытов при совпадении расчетных значений коэффициента фильтрации важно в том смысле, что свидетельствует о стабильности свойств проводящей среды в процессе экспериментальных исследований.

В работе Скавиньского проанализировано также влияние размеров проводящей среды на результаты опытов. Для этого выполнены замеры коэффициентов фильтрации в пробах длиной 9,4, 17,5 и 45,9 см (при одинаковом диаметре кварцевых зерен). Эти замеры показали, что длина пробы не оказывается на закономерности фильтрации, поэтому в дальнейшем Скавиньским использовался фильтрационный прибор с внутренней площадью поперечного сечения в 10 см^2 и длиной пробы проводящей среды в 10 см.

Таким образом, размеры фильтрационного прибора в опытах авторов обеспечивали вполне представительные экспериментальные данные в смысле стабильности свойств проводящей среды (последнее еще и контролировалось до хода опытов), тем более что оценка их представительности, компетентности [51, 52] применительно к натурному объекту не входило в задачу исследований, так как экспериментально выполнялась лишь качественная оценка общих закономерностей фильтрации при малых градиентах напора, т.е. пористая среда моделировала саму себя.

В этой связи необходимо заметить следующее. Неоднородность фильтрационных свойств пористой среды при возрастании градиентов напора в опытах Скавиньского [63] нарастает с увеличением размеров зерен (рис. 3). Как уже говорилось ранее, выносом глинистых частиц этот эффект объяснить нельзя. По мнению автора [18] он обусловлен несоответствием масштаба осреднения течения размерам осредняемого течения, т.е. размерам (поперечным) пробы проводящей среды. Так, с увеличением диаметра зерен растет площадь поперечного сечения каждой поры при уменьшении их числа и общем снижении пористости. С достижением площади пор определенной величины, так что она становится соизмеримой с площадью поперечного сечения потока воды, феноменологическая фильтрационная модель для описания течения уже неприме-

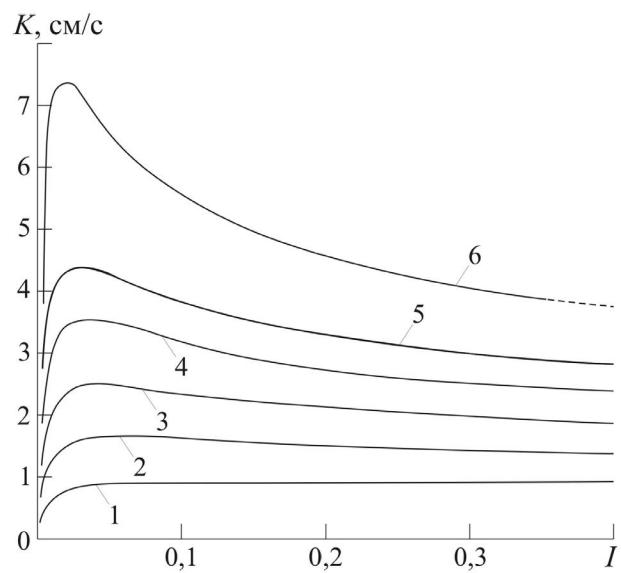


Рис. 3. Экспериментальные зависимости текущего значения коэффициента фильтрации от градиента напора при различных размерах зерен проводящей среды (по [63]), мм: 1,0-1,2 (1); 1,2-1,6 (2); 1,6-2,0 (3); 2,0-3,0 (4); 3,0-4,0 (5); 4,0-5,0 (6)

ним: течение перестает быть потенциальным (т.е. безвихревым) [16, 17]. Соответственно с увеличением градиента напора начинает существенно проявляться инерционная составляющая сопротивления движению жидкости, обусловливающая аномалию графика $K(I)$, аналогичную полученным в работе Скавиньского.

Результаты исследований приведены на рис. 4. Из экспериментального графика видно, что коэффициент фильтрации имеет максимальную величину и остается постоянным (в пределах погрешности определения) лишь при достаточно больших градиентах напора ($I > 0,04$). Для этого участка графика он имеет смысл коэффициента фильтрации K_0 , отвечающего течению при линейном законе. При снижении градиента ниже величины $I = 0,04$ коэффициент фильтрации закономерно уменьшается.

Следует подчеркнуть, что зарегистрированное отклонение от линейного закона фильтрации не может быть отнесено на счет погрешностей опытов; максимальная величина погрешности экспериментально определенного K не превышает 11 %, в то время как максимальное измеренное отклонение осредняющей кривой от значения K_0 составляет более 22 % (по отношению к K_0).

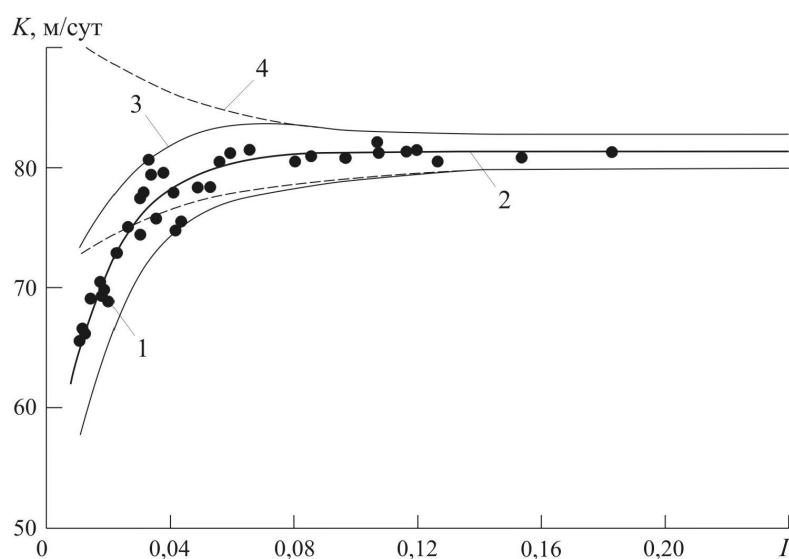


Рис. 4. Экспериментальный график зависимости текущего значения коэффициента фильтрации от градиента напора:
1 – экспериментальные данные; 2 – осредняющая кривая; 3 – граница доверительного интервала экспериментальных
данных; 4 – граница доверительного интервала при $K = K_0$

Таким образом, выполненные нами экспериментальные исследования течения воды через пористые среды при малых скоростях подтверждают отклонение от линейного закона фильтрации в области малых градиентов не только в глинистых породах, в которых оно экспериментально установлено и анализируется сравнительно давно, но и в значительно более крупнозернистых рыхлых породах – песке, гравии [18].

Для физической интерпретации наблюдаемой аномалии привлекаются обычно самые разнообразные соображения [1, 3, 5, 6, 11, 12, 33, 38, 48, 49]. Однако следует подчеркнуть еще раз, что с позиций макроскопической феноменологической теории фильтрации не имеет решающего значения тонкая физическая природа процесса движения реальной жидкости в реальных порах или трещинах. Не следует забывать – фильтрационная модель является эквивалентом не природного процесса переноса, а фиктивного (модельного) процесса течения некоторой модельной сплошной среды, обладающей свойствами идеальной жидкости и текущей по всему объему проводящей области. Поэтому для фильтрационной модели важны интегральные характеристики процесса, применимые к некоторому макрообъему проводящей среды. При этом необходимо только, чтобы параметры идеальной жидкости и про-

водящей среды обеспечивали хорошее согласование натурных и модельных экспериментов.

Отсюда, в частности, следует такой вывод: результаты исследований фильтрации воды в проводящей среде или отдельных капиллярах не могут привлекаться для обоснования (или подтверждения) той или иной физической гипотезы относительно, например, аномалий течения жидкости. В таких экспериментах характерный размер используемых технических средств равен масштабу осреднения течения или превышает его [13, 15, 16, 17], и, следовательно, подобные исследования не позволяют вообще судить о физическом состоянии воды в проводящей среде, ее взаимодействии с твердой поверхностью пор или трещин. Соответственно результаты одних и тех же экспериментов можно трактовать совершенно с разных позиций, что и встречается на практике. Этот вывод отражает фундаментальное положение, лежащее в основе феноменологической фильтрационной модели – уравнение движения, входящее в определяющую систему уравнений такой модели (наряду с уравнениями неразрывности и состояния), в эту модель задается, а не следует из нее.

Аналогично, при обобщении уравнения движения на случай нелинейного течения используется несколько подходов [38]. В соответствии с

одним из них выполняется формальная аппроксимация экспериментальной зависимости между скоростью фильтрации и градиентом давления. Другой предполагает применение для приближения процесса фильтрации воды уравнений, полученных для простейших моделей проводящих сред; обычно используются зависимости Букингема-Рейнера или Воларовича-Гуткина [11, 38], описывающие течение вязкопластичной жидкости в цилиндрических и плоских капиллярах как феноменологический процесс и основанные на реологическом уравнении состояния Шведова-Бингама. Проводящая среда представляется в этом случае набором (пучком) таких капилляров.

Первый подход полнее отвечает феноменологической модели фильтрации, т.е. позволяет описывать осредненные для всего элементарного объема проводящей среды характеристики, обозначать действие объемных сил. Однако введенные в уравнения фильтрации параметры не имеют физического обоснования, что ограничивает область приложений полученных зависимостей выборками экспериментальных данных и не дает основания для экстраполяции их за пределы этих выборок.

Второй на первый взгляд позволяет подвесить серьезную физическую основу под уравнение закона фильтрации. Вместе с тем, нерегулярность структуры порового пространства, с одной стороны, исключает возможность представления проводящей среды пучком капилляров, а с другой, не позволяет изучать фильтрацию воды обычными методами гидромеханики, т.е. решением уравнения течения вязкой жидкости для области, представляющей собой совокупность всех пор или трещин [8, 9, 39, 50]. Именно поэтому и осуществляется переход от физического описания течения к феноменологическому фильтрационному осреднением по масштабу, равному характерному размеру некоторого объема статистически однородной проводящей среды – бесконечно малого элемента системы жидкость–проводящая среда, физически вместе с тем намного превышающего размеры пор и зерен среды [13, 16, 17].

В качестве третьего подхода можно условно назвать попытку А.Г. Арье [3, 5, 6] обосновать нелинейный закон фильтрации в области малых градиентов давления с позиций молекуллярно-кинетической теории жидкостей и газов.

При оценке закономерностей взаимодействия фильтрующейся жидкости (воды) с твердым скелетом пористой среды (внутренней поверхностью отдельно взятой поры или трещины) использовался масштаб осреднения течения l_{min} , много меньший характерного размера поры или трещины (радиуса поры или раскрытия трещины). Однако в итоге, в процессе осреднении течения воды по характерному размеру поры или трещины, для вычисления средней скорости движения жидкости (или расхода потока) в поре или трещине А.Г. Арье получены уравнения, практически полностью совпадающие с уравнениями Букингема-Рейнера и Воларовича-Гуткина. Далее, при обобщении полученных уравнений для фильтрационной модели А.Г. Арье использовалось простейшее представление о структуре пористой среды – последняя представлялась набором (пучком) капилляров. Таким образом, и в этом случае, неопределенным остается переход от физического описания движения жидкости к фильтрационной модели, соответственно, не ясной становится применимость полученных А.Г. Арье уравнений для описания процесса фильтрации жидкости в пористой (или трещинной) проводящей среде.

Целесообразно поэтому сформулировать подход к обобщению закона фильтрации при малых градиентах давления, оставаясь в рамках понятийной базы и терминологии феноменологической фильтрационной модели.

Ранее со ссылкой на работы [8, 9] уже было показано – основное предположение при установлении вида закона состоит в том, что вектор скорости фильтрации в выбранной точке определяется свойствами жидкости, проводящей среды и градиентом давления (см. (5) и (6)). Единственным параметром системы вода–проводящая среда, “ответственным” за вероятное нарушение линейного закона фильтрации, может быть только вязкость жидкости; экспериментально и теоретически установлены аномалии вязкости воды, т.е. отличия ее от модельной ньютоновой, наиболее существенно проявляющиеся в области малых градиентов давления (малых напряжений сдвига) [15]. Кроме того, прямыми экспериментами установлено, что с ростом температуры фильтрующейся воды отклонения от линейного закона фильтрации уменьшаются и при температуре 60–70°C исчезают вовсе [11, 21].

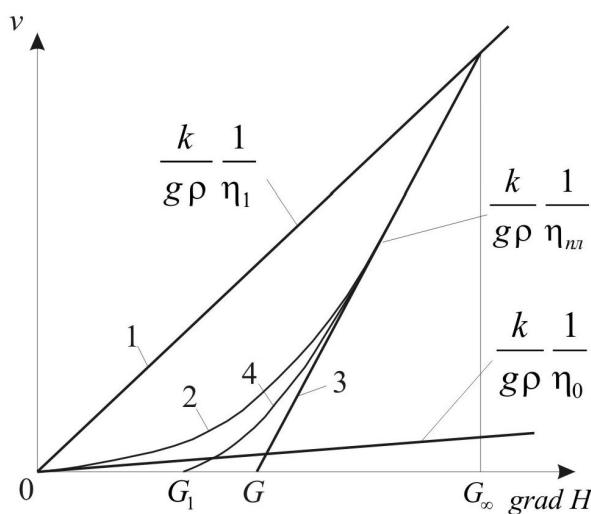


Рис. 5. Реологические модели жидкости: 1 – ньютона; 2 – неニュ顿ова (дилатантная); 3-4 – вязкопластичная (3 – модель Бингама; 4 – модель Шведова)

Воспользовавшись принципом пропорциональности, предложенным в [20], совершенно аналогично концепции П. А. Ребиндера [47] об эффективной вязкости жидкости для аппроксимации течения в отдельной поре или трещине, введем такое же представление в феноменологическую фильтрационную модель [15]. В соответствии с этой концепцией, вода, как и все жидкости с водородными связями, рассматривается как тиксотропная система с

эффективной вязкостью $\eta(\text{grad } p) = \frac{k|\text{grad } p|}{v}$
или, если перейти от давления к гидростатическому напору $\eta(\text{grad } H) = \frac{k|\text{grad } H|}{g\rho v}$ (здесь g –

ускорение свободного падения; остальные обозначения прежние). При этом под эффективной вязкостью в фильтрационной модели, как и в физическом представлении движения жидкости, следует понимать итоговую характеристику, описывающую равновесие для всего макрообъема проводящей среды между процессами разрушения и восстановления структуры жидкости.

Структурированные жидкости имеют две области градиентов давления (или напора) с постоянными значениями вязкости (см. рис. 5). В одной из них, где структура практически не разрушена, вязкость имеет наибольшее значение η_0 , в другой, где структура фильтрующейся жидкости разрушена полностью, наименьшее – η_1 .

Кривая $v = f(\text{grad } H)$ аппроксимируется несколькими прямыми, угловые коэффициенты которых соответствуют минимальной η_1 , максимальной η_0 и пластической вязкости η_{ns} ; последняя, как и ньютона, не зависит от скорости фильтрации.

Такая аппроксимация является вынужденной, так как использование понятия, обозначенного термином “эффективная вязкость”, при решении прикладных задач встречает серьезные математические трудности и заставляет ограничиваться рассмотрением более простых моделей (рис. 5), например, модели Бингамовского пластика, которую в терминах фильтрационной феноменологической теории можно представить следующим образом:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\eta_{\text{ns}}} \left(\text{grad } p - G \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} \right), \quad |\text{grad } p| \geq G \quad (8)$$

Здесь G – предельное значение начального градиента давления (или напора).

Напомним, что термин “начальный градиент” введен Н.П. Пузыревским и обозначает градиент давления, при котором фильтрация (в механическом смысле) начинается.

В [10, 27–29, 34, 35, 40, 49] предложены гиперболическая, степенная и полигональная аппроксимации реологической кривой. В целом эти модели правильнее приближают реальный процесс в области малых градиентов давления (или напора), однако выражение (8) имеет асимптотический смысл, описывая движение при относительно больших скоростях фильтрации; в области градиентов, меньших G , фильтрационный перенос трансформируется в бародиффузионный [15, 45]. В такой интерпретации закон фильтрации (8) описывает широкий класс нелинейных течений [8].

Нетрудно заметить, что уравнение движения (8) совпадает с эмпирической моделью Т.Н. Пузыревской [46]:

$$v = K_0 (I - G)^{\alpha}, \quad (9)$$

где $K_0 = \frac{k g \rho}{\eta}$ – коэффициент фильтрации, отвечающий закону Дарси; I – как и прежде, модуль текущего значения градиента гидростатического напора H ($H = \frac{p}{g \rho}$).

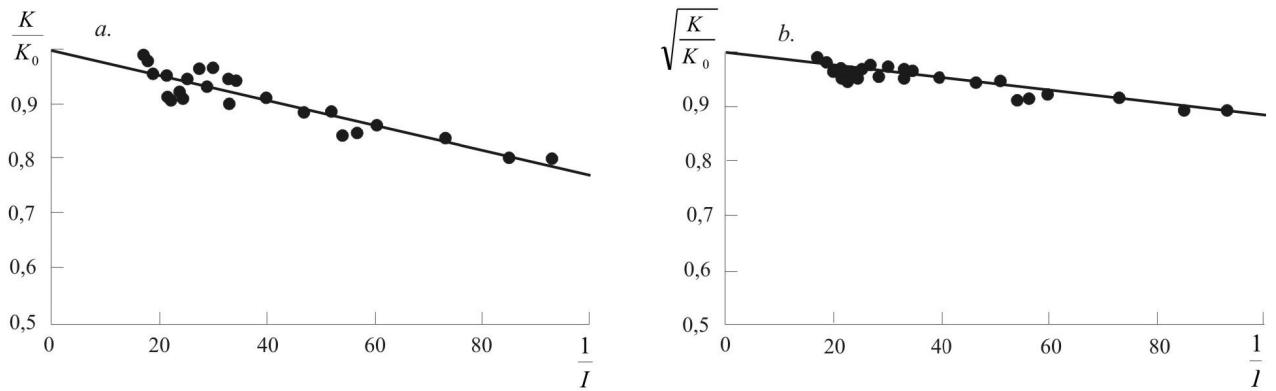


Рис. 6. Зависимость относительной величины коэффициента фильтрации от градиента давления при законе фильтрации с предельным градиентом (a) и отвечающем аппроксимации А.Г. Арье (b) по экспериментальным данным автора ($K_0 = 82,0$ м/сут)

Соотношение (9) целесообразно преобразовать к виду:

$$K = K_0 \left(1 - \frac{G}{I}\right) \text{ или } \frac{K}{K_0} = 1 - \frac{G}{I} \quad (10)$$

(здесь K – эффективное текущее значение коэффициента фильтрации), на основе которого удобно обрабатывать экспериментальные данные.

На рис. 6 показаны результаты исследований фильтрации воды в песках при малых градиентах напора, выполненных при участии автора [18]. Как видно из рис. 6а, опытные точки хорошо ложатся на прямую с угловым коэффициентом $G \cong 0,0022$.

Иное обобщение закона предлагает А.Г. Арье [3, 5, 6]:

$$v = K_0 I \left(1 - \frac{G_1}{I}\right)^2. \quad (11)$$

Это уравнение можно, по-видимому, считать хорошим приближением модели Шведова (рис. 5). Преобразованное к виду:

$$\sqrt{\frac{K}{K_0}} = 1 - \frac{G_1}{I}, \quad (12)$$

уравнение (11) позволяет наглядно интерпретировать экспериментальные данные; график зависимости (12) представляет собой прямую с угловым коэффициентом G_1 (рис. 6б). При этом следует различать значения G_1 в (11) и G в (9). Как показано на рис. 5, величина G соответствует напряжению сдвига τ_0 в модели Бингама, а G_1 – напряжению τ_1 в модели Шведова, поэтому $G_1 < G$. Например, для экспериментальной пря-

мой на рис. 6б угловой коэффициент $G_1 \cong 0,0010$, что в 2,2 раза меньше углового коэффициента G прямой на рис. 6а.

Смешивание понятий о начальном градиенте G_1 и предельном G (как это допускается в [5]) приводит к неверному представлению о физике процесса. В соответствии с выводами из этих работ получается, что закон (11) обуславливает большие отклонения от фильтрации по Дарси, чем закон с предельным градиентом (9), а это противоречит используемым понятиям и экспериментальным данным, из которых следует – процессы фильтрации при законе Дарси и при законе с предельным градиентом являются предельными, крайними вариантами течения жидкости через проводящие среды (рис. 5). Все остальные известные аппроксимации течения в области малых градиентов напора (или давления) располагаются между ними. Кроме того, по Арье законы фильтрации (9) и (11) не совпадают в области относительно больших градиентов. Вместе с тем, уже запись выражений (10) и (12), а также возможность построения графиков на рис. 6 по одним и тем же экспериментальным данным свидетельствуют о таком совпадении [15].

Необходимо подчеркнуть, что наличие начального (или предельного) градиента в формулах вовсе не означает отсутствия переноса при меньших (в сравнении с предельным или начальным) градиентах давления; в этой области градиентов перенос выражается уже диффузионным, вернее, бародиффузионным переносом (при этом пока нет данных о том, что и для бародиф-

фузионного переноса также существует свой начальный градиент давления). Соответственно под начальным (или предельным) градиентом следует понимать угловой коэффициент аппроксимирующих прямых [4, 15] (рис. 5), не вкладывая в это понятие более существенный физический смысл². В пользу такого представления о предельном (или начальном) градиенте говорит и то, что прямое экспериментальное его определение не удается [4, 42]. Повышение точности измерительной аппаратуры, используемой в опытах, позволяет при уменьшении градиента давления регистрировать бародиффузионный перенос [15, 45].

Для учета такого переноса в области $|grad p| < G$ (или $|grad p| < G_1$, например, аппроксимацию (8) целесообразно дополнить соотношением:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\eta_0} grad p,$$

где выражение $\frac{k}{\eta_0}$ эквивалентно коэффициенту фильтрации [3, 5, 6], представляющему собой обобщенный параметр бародиффузии.

Таким образом, привлечение представлений о структурированности фильтрующейся жидкости позволяет обобщить нелинейный закон фильтрации в области малых градиентов давления (или напора). Этот подход обеспечивает достаточно полное и точное макроскопическое описание движения жидкости, соответствующее феноменологической модели фильтрации, за рамки которой, как известно, выходит установление вида уравнения движения. Такое представление может быть расширено, в том числе, и на обобщение линейного закона фильтрации – за счет использования реологической модели ньютоновой жидкости (рис. 5).

Весьма продуктивным представляется введение принципа пропорциональности, обеспечивающего качественное соотнесение теоретических и экспериментальных представлений, используемых для физического описания движения жидкости в порах или трещинах, с теоретическими и экспериментальными представлениями, использующимися в фильтрационной модели. Как известно, ценность физических моделей движения ПВ и выполняемых обоснований их (в том числе и с позиций молекулярно-кинетической теории жидкостей) заключается в том, что подобные модели дают самый общий вид уравнений движения жидкости, качественно применимых и в фильтрационных моделях. Однако параметры, входящие в эти уравнения, должны определяться в рамках фильтрационной модели, т.е. с помощью экспериментальных средств с характерным размером, соизмеримым с l_n .

Вообще необходимо обратить внимание на чисто субъективный фактор, во многом способствовавший широкому распространению теоретических и опытных исследований, основывающихся на линейной теории фильтрации, при том, что к настоящему времени накоплено множество фактов, свидетельствующих о конкурентоспособности различных вариантов нелинейной теории. Этот фактор – несравненно большая простота и соответственно, разнообразие теоретических построений, базирующихся на законе Дарси. При этом решающим соображением, определяющим преимущественный выбор линейной теории, является то, что погрешности фильтрационной схематизации в большинстве случаев существенно превышают систематические погрешности на нелинейность фильтрации при использовании в фильтрационных расчетах линейной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев В.А., Гурбанов Р.С., Мамедов Г.А., Фарзане Я.Г. Обобщенный закон Дарси // Труды АзИНХ. 1967. Вып. 26. С. 77-88.
2. Альтовский М.Е. Расчет дебита по откачкам из одиночных скважин. М.: Л.: Госгеолиздат. 1940. 115 с.
3. Арье А.Г. Исследование процесса фильтрации жидкости в пористой среде // Обзор. ВИЭМС. Гидрогеология и инженерная геология. М., 1982. 57 с.

² Понятно, что величина расхода потока при бародиффузионном переносе, по крайней мере, на порядок меньше расхода фильтрационного потока. В этом смысле с позиций анализа фильтрационного потока бародиффузионным переносом можно пренебречь (при описании некоторых явлений это вполне допустимо и целесообразно – например, при описании релаксационной фильтрации ПВ), а тогда появляется формальное основание для придания начальному (или предельному) градиенту того физического смысла, что при градиентах, меньших начального, перенос вовсе отсутствует.

4. Арье А.Г. К вопросу о существовании начального градиента фильтрации // Формирование подземных вод как основа гидрогеологических прогнозов. Материалы I Всеобщей гидрогеологической конференции. М.: Наука, 1982. Т. 1. С. 109-114.
5. Арье А.Г. Физические основы фильтрации подземных вод. М.: Недра, 1984. 101 с.
6. Арье А.Г. Влияние физического взаимодействия воды и породы на процесс геофильтрации. Автореферат докторской диссертации... доктор геол.-минер. наук. М., 1987. 44 с.
7. Бадов В.В., Киселев А.А. Модели геофильтрации // Обзор. Гидрогеология и инженерная геология. М., ВИЭМС. 1984. 51 с.
8. Баренблatt Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 289 с.
9. Баренблatt Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
10. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
11. Бондаренко Н.Ф. Физика движения подземных вод. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 216 с.
12. Брилинг И.А. Фильтрация в глинистых породах // Обзор. ВИЭМС. Гидрогеология и инженерная геология. М., 1984. 57 с.
13. Бураков М.М. Исследование водоотбора в неоднородных по фильтрационным и емкостным свойствам водоносных пластах (на примере месторождений Центрального Казахстана). Автореферат докторской диссертации... кандидат геол.-минер. наук. Алма-Ата, 1987. 25 с.
14. Бураков М.М. Об уравнении движения жидкости в теории релаксационной фильтрации // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1994. № 6. С. 83-88.
15. Бураков М.М. О феноменологической модели фильтрации подземных вод при малых градиентах давления // Известия ВУЗов. Геология и разведка. 1997. № 2. С. 97-105.
16. Бураков М.М. Соотношение модельных представлений о движении подземных вод, его теоретические и практические приложения. I // Геология Казахстана. 1999. № 3. С. 85-95.
17. Бураков М.М. Соотношение модельных представлений о движении подземных вод, его теоретические и практические приложения. II // Геология Казахстана. 2002. № 4. С. 72-86.
18. Бураков М.М., Гринбаум И.И. Экспериментальное исследование фильтрации воды в песке при малых скоростях течения // Редкол. ж. Вестник АН КазССР. Алма-Ата, 1988. 10 с. Деп. в ВИНТИИ, № 8505-В 88.
19. Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
20. Веселов В.В., Бураков М.М. Реализация принципов системности при обосновании физико-математических моделей фильтрации подземных вод // Самоорганизация природных, техногенных и социальных систем: междисциплинарный синтез фундаментальных и прикладных исследований. Материалы второй Международной конференции. Алматы: Гылым, 1998. С. 61-63.
21. Гольдберг В.М., Скворцов Н.П. Проницаемость и фильтрация в глинах. М.: Недра, 1986. 161 с.
22. Гуревич А.Е. Практическое руководство по изучению движения подземных вод при поисках полезных ископаемых. Л.: Недра, 1980. 216 с.
23. Костерин А.В. О термодинамическом обосновании различных форм закона фильтрации // Исследования по подземной гидромеханике. Казань: Изд-во КГУ, 1979. Вып. 3. С. 39-41.
24. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.: Л.: Гостоптехиздат, 1949. 628 с.
25. Минский Е.М. О турбулентной фильтрации в пористых средах // Доклады АН СССР. 1951. 78. № 3. С. 409-412.
26. Минский Е.М. О притоке газа к забою несовершенной скважины при нелинейном законе сопротивления // Труды ВНИИ. 1954. Вып. 5. С. 3-16.
27. Мирзаджанзаде А.Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Баку: Азнефтеиздат, 1959. 409 с.
28. Мирзаджанзаде А.Х., Ковалев А.Г., Зайцев Ю.В. Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефти. М.: Недра, 1972. 200 с.
29. Мирзаджанзаде А.Х., Мингареев Р.Ш., Ентов В.М., Грайфер В.И., Вахитов Г.Г., Диляшев Р.Н., Зайцев Ю.В. О нелинейной фильтрации в слоистых пластах // Нефтяное хозяйство. 1972. № 1. С. 44-49.
30. Мироненко В.А. Динамика подземных вод. М.: Недра, 1983. 357 с.
31. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Основы гидрогеомеханики. М.: Недра, 1974. 296 с.
32. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Теория и методы интерпретации опытно-фильтрационных работ. М.: Недра, 1978. 325 с.
33. Михайлов Н.В., Ребиндер П.А. О структурно-механических свойствах дисперсных и высокомолекулярных систем // Коллоидный журнал. 1955. 17. № 2. С. 107-119.
34. Молокович Ю.М. Одномерная фильтрация несжимаемой вязко-пластичной жидкости. Казань: Изд-во КГУ, 1969. 88 с.
35. Молокович Ю.М., Скворцов Э.В. Одномерная фильтрация сжимаемой вязко-пластичной жидкости. Казань: Изд-во КГУ, 1971. 63 с.
36. Муратов И.Б., Саттаров М.А. Изучение фильтрационных аномалий в природных образцах песка при низких градиентах давления. Душанбе, 1977. 15 с. Деп. в ВИНИТИ, № 1468-77 Деп.
37. Насберг В.М. Обобщенная формула Дюпюи-Краснопольского для напорной совершенной скважины // Известия ТИИСГЭИ. 1947. 1. С. 129-142.
38. Нерпин С.В., Чудновский А.Ф. Энерго- и массообмен в системе растение – почва – воздух. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 359 с.
39. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Введение. М.: Мир, 1990. 344 с.
40. Огibalов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязко-пластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1970. 415 с.
41. Основы гидрогеологии. Гидрогеодинамика / И.К. Гавич, В.С. Ковалевский, Л.С. Язвин и др. Новосибирск: Наука, 1983. 241 с.
42. Павлонский В.М. Фильтрация воды в глинистых грунтах при малых градиентах напора // Фильтрация воды в пористых средах. Доклады 3 Международного симпозиума. Киев, 1978. Ч. 1. С. 75-82.

43. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.
44. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
45. Порядин В.И. Особенности инфильтрационного водобмена в пласте//Геология Казахстана. 2002. №2. С. 80-98.
46. Пузыревская Т.Н. Просачивание воды через песчаные грунты // Известия НИИГ. 1931. 1. С. 251-256.
47. Ребиндер П.А. Физико-химическая механика – новая область науки. М., 1958. 78 с.
48. Самойлов О.Я. Структура водных растворов электролитов и гидратация ионов. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 182 с.
49. Саттаров М.А. Вопросы фильтрации в области малых скоростей течения. Автореферат диссертации... доктор техн. наук. Киев, 1978. 44 с.
50. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.
51. Ситников А.Б. Исследование массопереноса подземных вод в насыщенно-ненасыщенных грунтах зоны аэрации. Диссертация... доктор геол.-минер. наук. Киев, 1978. 369 с.
52. Ситников А.Б. Динамика влаги и солей в почвогрунтах зоны аэрации. Киев: Наукова думка, 1986. 152 с.
53. Степочкин Б.Ф. О двучленной формуле сопротивления пористых сред// Журнал прикладной механики и технической физики. 1962. № 3. С. 117-120.
54. Тагильцев С.Н. Экспериментально-теоретическая модель процесса нарушения линейного закона фильтрации и ее практическое значение // Формирование подземных вод как основа гидрогеологических прогнозов. Материалы I Всесоюзной гидрологической конференции. М.: Наука, 1982. Т. 1. С. 118-123.
55. Требин Г.Ф. Экспериментальные исследования режимов течения жидкости и газа в пористой среде // Труды ВНИИ. 1954. Вып. 3. С. 85-106.
56. Форхгеймер Ф. Гидравлика. М.: Л.: ОНТИ, 1935. 616 с.
57. Хаазе Р. Термодинамика необратимых процессов. М.: Мир, 1967. 544 с.
58. Христианович С.А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // Прикладная математика и механика. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 33-52.
59. Шейдеггер А. Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Гостоптехиздат, 1960. 250 с.
60. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ, 1979. 368 с.
61. Irmsay S. On the theoretical derivation of Darcy and Forchheimer formulas // Transactions. American Geophysical Union. 1958. 39. P. 702-707.
62. King F.H. Principles and conditions of the movement of ground-water // U.S. Geological Survey. 19-th Annual Report. 1898. 2. P. 59-297.
63. Skawicki R. Mechanizm przepływu cieczy w oprodach porowatych w pwiete badac eksperimentalnych // Zeszyty naukowe AGH. 1974. № 459. 62 s.
64. Schneebeli G. Experiences sur la limite de validite de la turbulence dans un écoulement de filtration // La hoille blanche. 1955. № 2. P. 141-149.
65. Vries J. de. Prediction of non-Darcy flow in porous media // Journal of the irrigation and drainage engineering. 1979. 105. № IR2. P. 147-162.