

# Математика

---

---

УДК 519.6+517.9

Г. ДАИРБАЕВА, Л. Н. ТЕМИРБЕКОВА

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА НА ОСНОВЕ МЕТОДА СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ

КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы

Рассматривается интегральное уравнение Гельфанд-Левитана для решения коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения. Предложен алгоритм численного решения интегрального уравнения Гельфанд-Левитана для задачи с сосредоточенным источником для гиперболического уравнения. Построен пример задачи с сосредоточенным источником. Численно решены прямая и обратная задача, результаты расчетов приведены в виде графиков.

В данной работе предлагается пример и алгоритм численного решения интегрального уравнения Гельфанд-Левитана для задачи с сосредоточенным источником для гиперболического уравнения

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + qu = 0.$$

Рассматривается дискретный аналог метода Гельфанд-Левитана определения коэффициентов  $q(x)$  рассматриваемого уравнения по вычисленным при  $x = 0$  следам решений семейства задач Коши.

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, \quad t = 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x). \quad (2)$$

В прямой задаче требуется определить функцию  $u(x,t)$  по известным функциям  $q(x)$  и начальным условиям (2).

В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию  $q(x)$  по дополнительным информаций

$$u(0,t) = f(t), \quad u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Обратным задачам вида (1)–(3) посвящены монографии В. Г. Романова [1], С. И. Кабанихина [2]. В работах И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [3], М. Г. Крейна [4] доказаны теоремы об однозначной разрешимости задачи (1)–(3). Дискретный аналог метода Гельфанд-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения исследована в работе С. И. Кабанихина и Г. Б. Баканова [5]. В данной работе показано, что дискретный аналог обратной задачи эквивалентен конечному набору систем линейных алгебраических уравнений.

В работе [2] получено интегральное уравнение для обратной задачи (1)–(3)

$$\frac{1}{2} [f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = 0, \quad (4)$$
$$x > |t|.$$

Для численного решения интегрального уравнения (4) получается система линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей. При каждом фиксированном  $x > 0$  соотношение (4) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода относительно функции  $\tilde{w}(x, t)$ ,  $t \in (-x, x)$ .

Решение этого уравнения относится к классу некорректных задач. В работе [2], дифференцируя уравнение (4) по  $t$ , получено уравнение типа Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, t) + \int_{-x}^x f'(t - \tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau &= -\frac{1}{2} [f'(t - x) + f'(t + x)] \\ x > 0, \quad t \in (-x, x) \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку решение  $\tilde{w}(x, t)$  уравнения (5) четно по переменной  $t$ , это уравнение можно переписать в виде [2]

$$\tilde{w}(x, t) + \int_0^x [f'(t - \tau) + f'(t + \tau)] \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} [f'(t - x) + f'(t + x)], \quad x > 0, t \in [0, x] \quad (6)$$

Уравнение (6) эквивалентно уравнению (4) при дополнительном условии, что решение  $\tilde{w}(x, t)$  уравнения (6) является четной функцией по аргументу  $t$ .

Искомая функция  $q(x)$  связана с решением интегрального уравнения (6) соотношением

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x - 0), \quad x > 0 \quad (7)$$

Для того чтобы построить решение обратной задачи в точке  $x > 0$ , достаточно решить уравнение (6) и найти  $q(x)$  по формуле (7). Из теории уравнений Фредгольма известно, что для малых значений  $x$  уравнение (6) однозначно разрешимо.

Воспользуемся какой-либо формулой численного интегрирования

$$J(\psi) = \int_a^b \psi(x) dx \approx S_m(\psi) = \sum_{j=1}^m c_j \psi(x_j^{(m)}). \quad (8)$$

Для приближенного решения интегрального уравнения (6) заменим интеграл в этом уравнении на квадратурную сумму и при фиксированном  $x > 0$  и при каждом  $t^k$  получим систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} w(x, t^k) + \sum_{i=0}^n c_i (f'(t^k - \tau_i) + f'(t^k + \tau_i)) w(x, \tau_i) - R_m(w) &= -\frac{1}{2} [f'(t^k - x) + f'(t^k + x)] \\ 0 \leq t^k \leq x, \quad 0 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (9)$$

Остаточный член  $R_m(w)$  при вычислении интеграла с помощью квадратуры (8) является функцией переменной  $t$ . Полагая в (9)  $t = t^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ; отбрасывая остаточный член, получим систему уравнений

$$Aw = y, \quad (10)$$

где матрица  $A$  в случае метода прямоугольников имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 + h(f'(t^0 - \tau_0) + f'(t^0 + \tau_0)) & h(f'(t^0 - \tau_1) + f'(t^0 + \tau_1)) & \dots & h(f'(t^0 - \tau_n) + f'(t^0 + \tau_n)) \\ h(f'(t^1 - \tau_0) + f'(t^1 + \tau_0)) & 1 + h(f'(t^1 - \tau_1) + f'(t^1 + \tau_1)) & \dots & h(f'(t^1 - \tau_n) + f'(t^1 + \tau_n)) \\ h(f'(t^2 - \tau_0) + f'(t^2 + \tau_0)) & h(f'(t^2 - \tau_1) + f'(t^2 + \tau_1)) & \dots & h(f'(t^2 - \tau_n) + f'(t^2 + \tau_n)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(f'(t^n - \tau_0) + f'(t^n + \tau_0)) & h(f'(t^n - \tau_1) + f'(t^n + \tau_1)) & \dots & 1 + h(f'(t^n - \tau_n) + f'(t^n + \tau_n)) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$w = \begin{pmatrix} w(x, \tau_0) \\ w(x, \tau_1) \\ w(x, \tau_2) \\ \dots \\ w(x, \tau_n) \end{pmatrix}, \quad y = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} f'(t^0 - x) + f'(t^0 + x) \\ f'(t^1 - x) + f'(t^1 + x) \\ f'(t^2 - x) + f'(t^2 + x) \\ \dots \\ f'(t^n - x) + f'(t^n + x) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Для решения задачи (10) применяем итерационный метод оптимизации [2] и прямой метод SVD [2, 7].

**Сингулярное разложение.** Систему линейных уравнений можно решать эффективным методом сингулярного разложения, основанном на полном ортогональном разложении, имеющий вид [6]

$$A = UVK.$$

Здесь  $U$  и  $V$  – ортогональные матрицы размеров  $(n \times n)$ ,  $K$  – диагональная матрица с сингулярными числами на главной диагонали. Изложим алгоритм счета методом сингулярного разложения. Система линейных алгебраических уравнений (10) имеет вид.

$$UKVw = y. \quad (13)$$

Умножая (13) слева на транспонированную к  $U$  матрице  $U^T$ , имеем

$$KVw = U^T y,$$

так как  $UU^T = I$ ,  $I$  – единичная матрица.

Обозначим через  $l$  вектор  $Vw$ , тогда получим

$$Kl = U^T y. \quad (14)$$

Из уравнения (14) находим численно вектор  $l$ . Далее из уравнения

$$Vw = l. \quad (15)$$

Умножая слева на  $V^T$ , находим  $w$

$$w = V^T l.$$

**Метод оптимизации.** Итерационные методы строим из вариационного принципа, т.е. найти решение уравнения (10), доставляющий минимум функционалу

$$J(w) = \|Aw - y\|^2 \rightarrow \min.$$

Рассмотрим явный итерационный метод

$$w^{k+1} = w^k - \alpha(Aw^n - y). \quad (16)$$

Обозначим через  $r_k = Aw^n - y$  невязку, которая получается при подстановке приближенного значения  $w^k$ , полученного на  $k$ -й итерации в уравнения (10). Итерационный параметр  $\alpha$  выбирается из условия минимума  $\|r_{k+1}\|$  при заданной норме  $\|r_k\|$ .

Перепишем (16) в виде

$$w^{k+1} = w^k - \alpha r_k$$

Отсюда получим

$$Aw^{k+1} = Aw^k - \alpha Ar_k$$

И, следовательно,

$$r_{k+1} = r_k - \alpha Ar_k \quad (17)$$

Возведя обе части уравнения (17) скалярно в квадрат, получим

$$\|r_{k+1}\|^2 = \|r_k\|^2 - 2\alpha(r_k, Ar_k) + \alpha^2 \|Ar_k\|^2 \quad (18)$$

Отсюда видно, что  $\|r_{k+1}\|$  достигает минимума, если

$$\alpha = \frac{(Ar_k, r_k)}{\|Ar_k\|^2}. \quad (19)$$

**Пример задачи с сосредоточенным источником и ее решение.** Задача (1), (2) с начальным условием в виде дельта – функции поставлена для нахождения обобщенного решения. Однако, при нахождении численного решения необходимо  $\delta$ -функцию приближать последовательностью функций (например, функция «колокольчик»). В данном параграфе сделаем первый шаг для численного решения задачи (1), (2).

Рассмотрим пример прямой задачи, в которой вместо дельта-функции Дирака, взята функция  $\frac{1}{2|x|}$ . Она удовлетворяет некоторым свойствам дельта-функции Дирака. Пусть  $q(x) = \frac{2|x|}{x^3} sign(x)$ .

Нами рассматривается следующая прямая задача

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, t > 0 \quad (20)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{2|x|} \quad (21)$$

Легко проверить, что решением этой задачи будет функция

$$u(x, t) = \frac{t}{2|x|} \quad (22)$$

В нашем случае обратная задача выглядит следующим образом:

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, t > 0 \quad (23)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{2|x|} \quad (24)$$

Дополнительная информация о решении прямой задачи будет иметь следующий вид

$$u(0, t) = \frac{t}{\varepsilon}, \quad t \geq 0 \quad (25)$$

Согласно результатам исследований работ С. И. Кабанихина [2] прямую задачу (1)–(2) можно записать в виде задачи Гурса:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - q(x)u \\ u|_{t=|x|} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (26)$$

$$|x| < t < 2 - |x|, \quad t < |x|.$$

Пример (20)–(21) удовлетворяет задаче Гурса.

Гиперболическое уравнение (26) численно решаем с помощью разностной схемы:

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} - 0,5(q_{i+1} + q_{i-1}) \frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2}, \quad (27)$$

При  $\tau = h$  получаем схему квадрат:

$$u_i^{k+1} = u_{i+1}^k + u_{i-1}^k - u_i^{k-1} - h^2 \frac{q_{i+1} + q_{i-1}}{2} \left( \frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2} \right). \quad (28)$$

Область определения квадрат  $D = \{-1 < x < 1, 0 < t < 2\}$ . Строим сетку так, как показано на рис. 1. Разобъем отрезок  $[-1, 1]$  оси  $x$  и  $[0, 2]$  оси  $t$  на  $n$  частей,  $u(i, k)$  – множество функций двух аргументов,  $x_l = lh$ ,  $t_n = n\Delta t$  – узлы сетки,  $h$  – шаг сетки по  $x$ ,  $\Delta t$  – шаг сетки по  $t$ ,  $n1 = n + 1$  – количество узлов сетки,  $m = \left[ \frac{n1}{2} + 1 \right]$  – номер узла сетки при  $x = 0$ .  $q(x) = \frac{1}{2|x|}$  – заданная функция,

$r(k) = u(m, k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n1$  – искомая функция. Схема, по которой решаем задачу Гурса, показана на рис. 2.

Алгоритм решения разностной прямой задачи:

1) вычисляются значения на характеристиках по формуле  $u_i^i = 0.5$

$u(i, k1) = 0.5$  – значение функции на характеристике слева,

$u(i1, k) = 0.5$  – значение функции на характеристике справа.

2) положим  $mm = mm - 1$ .

3) строим цикл  $l$  от 2 до  $n$  с шагом 2.

4) вычисляем  $mm = mm + 1$ .

5) положим  $ll = 0$ .

6) строим цикл по  $k$  от 1 до  $mm$ .

7) вычисляем  $ll = ll + 1$ .

8) определяем номер узла по направлению  $x$  по формуле  $il = m - ll + 1$ .

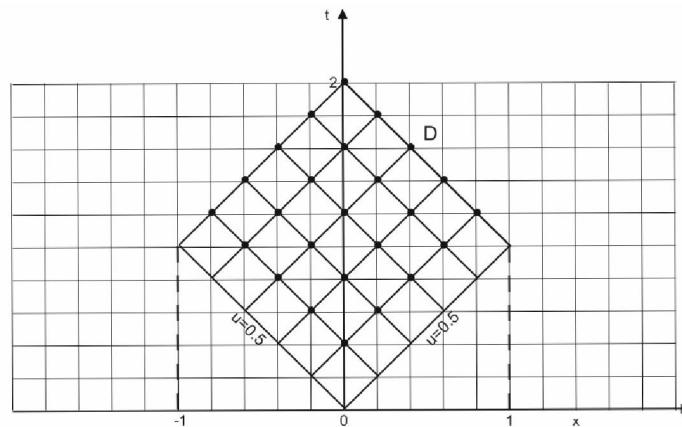


Рис. 1. Схема решения прямой задачи. Область  $D = \{-1 < x < 1, 0 < t < 2\}$

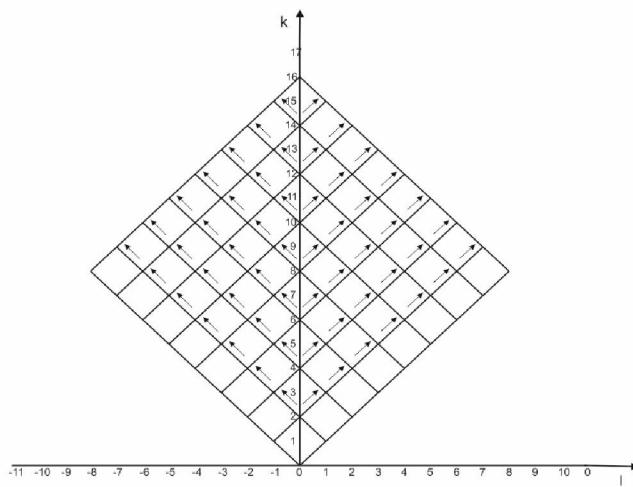


Рис. 2. Схема решения прямой задачи

9) по формуле

$$u(il, k+1) = u(il+1, k) + u(il-1, k) - u(il, k-1) - \\ - \frac{1}{4}h^2(q(il+1) + q(il-1))(u(il-1, k) + u(il+1, k))$$

вычисляем значения искомой функции в узлах сетки, расположенных слева узла  $i = m$ . Аналогично вычисляются значения функции и в узлах сетки, расположенных справа узла  $i = m$ .

10) вычисляем  $ip = m + ll - 1$ .

11) находим

$$u(ip, k+1) = u(ip+1, k) + u(ip-1, k) - u(ip, k-1) - \\ - \frac{1}{4}h^2(q(ip+1) + q(ip-1))(u(ip-1, k) + u(ip+1, k)).$$

12) вычисляем  $r(k) = u(m, k)$ . Так как по схеме мы находим значения через одну точку с шагом 2, то для нахождения в каждой точке сетки необходимо интерполировать по четырем значениям:

$$u(m, k) = 0.25(u(m-1, k) + u(m+1, k) + u(m, k-1) + u(m, k+1)).$$

Составлена программа на ЭВМ. Функция  $q(x)$  имеет график, показанный на рис. 3. Решение задачи (20), (21) приведено на рис. 4.

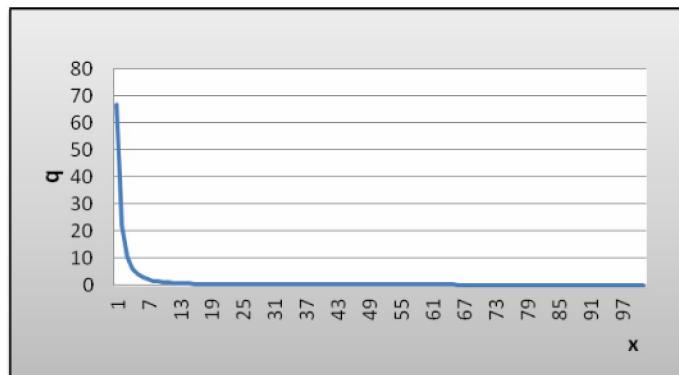


Рис. 3. График функции  $q(x)$

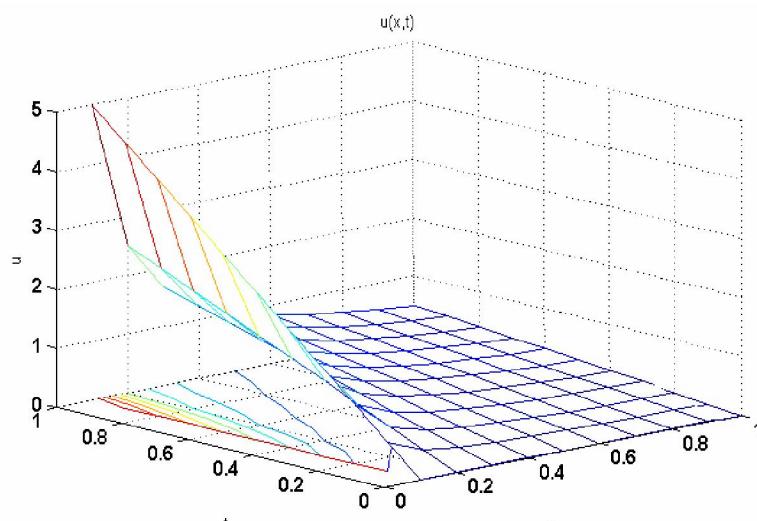


Рис. 4. Решение задачи (20)–(21)

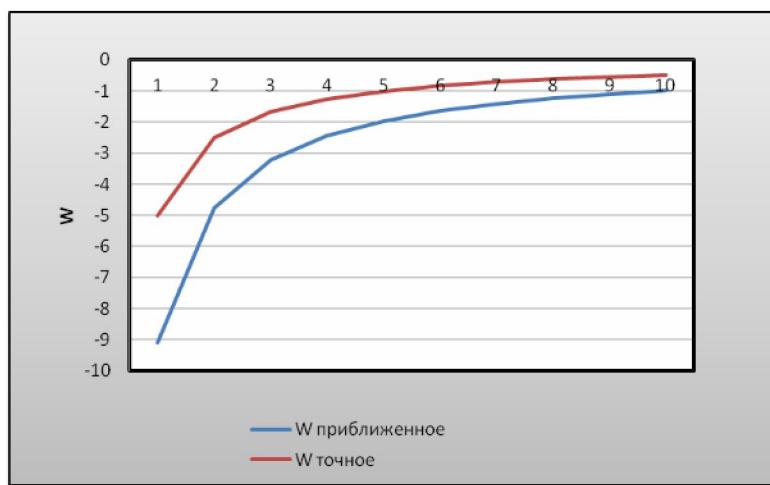


Рис. 5

Обратная задача (23)–(24) с дополнительной информацией (25) решена на ЭВМ. На рис. 5 показано сравнение приближенного и численного решения функции  $\tilde{w}(x,x)$  при  $\varepsilon = 0,01$ . Из графика видно, что функция  $\tilde{w}(x,x)$  определяется с точностью до постоянной согласно формуле (7).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 263 с.
- 2 Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
- 3 Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН. Сер. матем. 1951. – Т. 15. – С. 309-360.
- 4 Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 94, № 6. – С. 767-770.
- 5 Кабанихин С.И., Баканов Г.Б. Дискретный аналог метода Гельфанд-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40, №2. – С. 307-324.
- 6 Годунов С.К. Решение системы линейных уравнений. – М.: Наука, 1980.
- 7 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1984, 263 (in Russ.).  
Kabanikhin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi. Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, Novosibirsk, 2009, 457 (in Russ.).  
Gelfand I.M., Levitan B.M. Ob opredelenii differencial'nogo uravnenija po ego spektral'noj funkciij. Izv. AN, ser. matem., 1951, t.15, 309-360 (in Russ.).  
Krejn M.G. Ob odnom metode jeffektivnogo reshenija obratnoj kraevoj zadachi. Dokl. AN SSSR. 1954. T.94, № 6. 767-770 (in Russ.).  
Kabanikhin S.I., Bakanov G.B. Diskretnyj analog metoda Gelfanda-Levitana v dvumernoj obratnoj zadache dlja giperbolicheskogo uravnenija. Sibirskij matematicheskij zhurnal, 1999, t.40, №2, S. 307-324 (in Russ.).  
Godunov S.K. Reshenie sistem lineynyh uravneniy. M.: Nauka, 1980 (in Russ.).  
Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Chislennye metody. M.: BINOM. Laboratoriya znanij, 2008, 636 (in Russ.).

L. N. Temirbekova

СИНГУЛЯРЛЫҚ ЖІКТЕУ МЕН ОҢТАЙЛАНДЫРУ ӘДІСІ НЕГІЗІНДЕ  
ГЕЛЬФАНД-ЛЕВИТАН ТЕНДЕУІН САНДЫҚ ШЕШУ

Жұмыста коэффициентті көрі гиперболалық тендеулерді шешуге арналған интегралдық Гельфанд–Левитан тендеуі қарастырылған. Белгілі бір есеп үшін интегралдық Гельфанд–Левитан тендеуінің сандық шешу алгоритмі беріліп, мысал келтірілген. Тура және көрі есептің сандық шешіліп, оның нәтижелері график түрінде келтірілген.

L. N. Temirbekova

THE NUMERICAL DECISION OF EQUATION GEL'FAND-LEVITANA  
ON THE BASIS OF METHOD SINGULAR OF DECOMPOSITION AND OPTIMIZATION

We consider the Gelfand–Levitant integral equations of solving the inverse problem for hyperbolic equations. We propose a numerical algorithm of solving of the Gelfand–Levitant integral equations for a problem with a point source for hyperbolic equation. We construct an example of the problem with a point source. Numerically solved by the direct and inverse problem, the results of calculations are presented in graphs.