УДК 521.1

Б.И. ДЕМЧЕНКО

ИНТЕГРИРУЕМЫЙ ВАРИАНТ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Предлагается интегрируемое уравнение движения небесного тела “по спирали” при специальном выборе закона сопротивления. Решение выражается через интегральные тригонометрические функции si(x), ci(x).

1). В небесной механике существует весьма небольшой набор модельных задач, допускающих конечное аналитическое решение. Мы предлагаем еще одну такую задачу, учитывающую силу сопротивления окружающей среды.

Основное уравнение в векторной форме имеет вид:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} - \frac{\varepsilon}{r^2}\dot{\vec{r}} \tag{1}$$

где μ – гравитационный параметр, ε – некоторая постоянная.

Физическая интерпретация этого уравнения следующая: небесный объект малой массы движется в ньютоновском поле тяготения центрального тела, окруженного атмосферой, причем сила сопротивления прямо пропорциональна скорости, а плотность атмосферы убывает как квадрат расстояния от притягивающего центра.

Естественно полагать, что ε – малая положительная величина, хотя полученное ниже решение будет формально справедливым при любом значении ε, включая отрицательное и нулевое значение. При отрицательном ε движение происходит по раскручивающейся спирали (то есть разгон вместо торможения), а значение $\varepsilon=0$ соответствует классической задаче двух тел.

Очевидно, что решение уравнения (1) должно содержать шесть независимых постоянных интегрирования.

2). Умножая обе части уравнения (1) векторно на r слева, получим:

$$\left[\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}}\right] = -\varepsilon/r^2\cdot\left[\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right]$$

Или

$$d\vec{M}/dt = -\varepsilon/r^2\cdot\vec{M} \tag{2}$$

где

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right]$$

есть вектор момента импульса на единицу массы. Из равенства (2) следует, что этот вектор может меняться по величине, но не изменяет своего направления, то есть движение происходит в неизменной плоскости. Этого следовало ожидать, так как в исходном уравнении (1) присутствуют только силы, лежащие в плоскости векторов “радиус-скорость”.

Положение плоскости орбиты естественно задавать двумя стандартными параметрами: i – наклон, Ω – долгота восходящего узла. Это суть две первые постоянные интегрирования.

3). Дальнейшее движение будем рассматривать в плоскости орбиты. Введем здесь полярную систему координат (r,φ). Без ограничения общности можно считать, что в начальный момент $t=t_0$ угол φ равен нулю, то есть $\varphi(t=t_0)=\varphi_0=0$. Значение φ_0 есть третья постоянная интегрирования.

Определим два стандартных единичных вектора: e_r – направлен по радиусу, e_φ – направлен перпендикулярно радиусу с поворотом против часовой стрелки. Собирая в уравнении (1) по отдельности члены с e_r, e_φ и учитывая правила дифференцирования единичных векторов, в итоге получим основную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \mu/r^2 + \varepsilon/r^2\cdot\dot{r} = 0 & (4) \\ 2r\cdot\dot{r}\cdot\dot{\varphi} + r^2\cdot\ddot{\varphi} + \varepsilon\cdot\dot{\varphi} = 0 & (5) \end{cases}$$

Обратимся сначала к уравнению (5). Его можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}(M + \varepsilon\varphi) = 0\ , \tag{6}$$

где $$M = \left|\vec{M}\right| = r^2\cdot\dot{\varphi} \tag{7}$$

есть модуль вектора момента импульса. Отсюда следует, что M зависит от полярного угла φ линейно:

$$M(\varphi) = M_0 - \varepsilon \cdot \varphi \tag{8}$$

где M_0 – четвертая постоянная интегрирования, равная моменту импульса в начальный момент. Из последней формулы сразу можно определить, что при $\varepsilon>0$ максимальное число оборотов N, которое способно совершить пробное тело, равно: $N=abs(M_0)/(2\pi\varepsilon)$.

Уравнения (5), (6) будут справедливыми также при $d\varphi/dt = 0$. Этот случай соответствует прямолинейному движению вдоль радиуса, при котором $\varphi = const$, $M(\varphi) \equiv 0$. Его мы рассмотрим ниже.

4). Перейдем к уравнению (4). Поскольку время t в это уравнение явно не входит, то вместо времени в качестве независимой переменной возьмем угол φ, а в качестве новой функции возьмем $u=1/r$ (замена Бине). Тогда, учитывая формулу (7), после несложных стандартных преобразований, получим:

$$u'' + u = f(\varphi) \tag{9}$$

где

$$f(\varphi) = \mu/M^2 = \mu/(M_0 - \varepsilon\cdot\varphi)^2 \;;$$

Решение уравнения (9) можно найти методом вариации произвольных постоянных [1,2]:

$$u(\varphi) = [C_1 + u_1(\varphi)]\cdot\cos(\varphi) + [C_2 + u_2(\varphi)]\cdot\sin(\varphi) \tag{10}$$

где C_1, C_2 – две последние постоянные интегрирования, $C_1=u(0)$, $C_2=u'(0)$,

$$u_1(\varphi) = -\int_0^{\varphi} f(x)\sin(x)dx = -\mu\int_0^{\varphi}\frac{\sin(x)dx}{(M_0-\varepsilon x)^2} \tag{11}$$

$$u_2(\varphi) = \int_0^{\varphi} f(x)\cos(x)dx = \mu\int_0^{\varphi}\frac{\cos(x)dx}{(M_0-\varepsilon x)^2} \tag{12}$$

Интегралы, входящие в формулы (11), (12), могут быть представлены в виде [3]:

$$\int\frac{\sin(x)dx}{(M_0-\varepsilon x)^2} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{\sin(x)}{x-b} - \cos(b)\cdot ci(x-b) + \right.$$

$$\left. + \sin(b)\cdot si(x-b)\right]$$

$$\int\frac{\cos(x)}{(M_0-\varepsilon x)^2} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{\cos(x)}{x-b} + \sin(b)\cdot ci(x-b) + \right.$$

$$\left. + \cos(b)\cdot si(x-b)\right]$$

где $b=M_0/\varepsilon$ есть максимальный угол поворота φ_{max}, а интегральные тригонометрические функции определяются известными выражениями [3-5]:

$$si(x) = -\int_x^{\infty}\sin(t)/t\cdot dt \;;\; ci(x) = -\int_x^{\infty}\cos(t)/t\cdot dt \;.$$

На практике вместо si(x), ci(x) могут быть полезны комбинации вида:

$$F(x) = \sin(x)\cdot ci(x) - \cos(x)\cdot si(x)$$

$$G(x) = -\cos(x)\cdot ci(x) - \sin(x)\cdot si(x)$$

Функции F(x), G(x) в среднем ведут себя более гладко, чем si(x), ci(x), для них имеются асимптотические разложения и дробно-рациональные аппроксимации [4].

5). Формула (10) позволяет по заданному полярному углу φ найти u, а следовательно и расстояние r. Осталось установить связь φ с временем t. Ее мы получим из соотношений (7), (8):

$$t - t_0 = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(M_0-\varepsilon\varphi)\cdot u^2(\varphi)} \tag{13}$$

6). Наконец, рассмотрим вариант прямолинейного радиального движения при $\varphi=const$, или $M(\varphi) \equiv 0$. Большого практического смысла такое движение не имеет вследствие своей вырожденности, однако в реальности возможны близкие ситуации, когда скорость в начальный момент направлена “почти вдоль радиуса”. Кроме того, здесь легко прослеживается связь уравнения (1) с классической задачей двух тел.

Уравнение (4) в этом случае примет вид:

$$\ddot{r} + \mu/r^2 + \varepsilon/r^2\cdot\dot{r} = 0 \;.$$

Возьмем r в качестве новой независимой переменной, а $y=dr/dt$ – в качестве новой функции. Учитывая, что при операции дифференцирования $dy/dt= y\,dy/dr$, в итоге получим:

$$\frac{y}{\mu+\varepsilon y}\cdot\frac{dy}{dr} = -\frac{1}{r^2} \;.$$

Или, после интегрирования,

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\left[y - \frac{\mu}{\varepsilon}\cdot\ln(1+\frac{\varepsilon}{\mu}y)\right] = \frac{1}{r} + h \;, \tag{14}$$

где h – постоянная интегрирования.

7). Покажем, что в последнем уравнении величина $a=-1/(2h)$ имеет примерно такой же смысл, что и большая полуось в задаче Кеплера. Для этого будем считать, что ε – малая величина, и в разложении $ln(1+x) = x-x^2/2+x^3/3-...$ удержим два первых слагаемых (здесь $x=\varepsilon y/\mu$). Тогда из формулы (14) найдем:

$$y^2/(2\mu) = 1/r + h \quad .$$

Или, заменяя h на $-1/(2a)$, а у на dr/dt,

$$(dr/dt)^2 = \mu(2/r - 1/a) \ ,$$

что совпадает с интегралом энергии для прямолинейного кеплеровского движения [6].

Таким образом, несмотря на явно диссипативный характер уравнения (1), в случае прямолинейного движения трансцендентное уравнение (14) имеет отношение к закону сохранения энергии. Кроме того, оно устанавливает связь между скоростью dr/dt и радиусом r. Получить явную зависимость $r(t)$ в конечном виде не удается, хотя это можно сделать, например, в виде бесконечного временного ряда, или в виде некоторого итерационного процесса.

Работа выполнена в рамках ПФИ, шифр Ф-0351.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. // М., Наука, 1975, 239с.

2. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. // М., Наука, 1982, 331с.

3. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. // М., Наука, т.1-элементарные функции. 1981, 800 с.; т.2.-Специальные функции, 1983, 750 с. т.3.-Дополнительные главы, 1986, 800 с.

4. Справочник по специальным функциям, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, // М., Наука, 1979, 830 с.

5. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. // М., Наука, 1977, 342 с.

6. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. // М., Наука, 1968, 800 с.

Summary

The integrable equation of spiral motion of celestrial body with the special resisting law is presented. The solution contains integral trigonometric functions si(x), ci(x).

Астрофизический Институт
им. В.Г. Фесенкова МОН РК
г. Алматы.

Поступила 20 апреля 2008 г.