

*М. ДИНЕЙХАН<sup>1</sup>, Ю. Л. ПАРФЕНОВА<sup>2</sup>,*

*С. А. ЖАУГАШЕВА<sup>1</sup>, А. Н. ИСАДЫКОВ<sup>1</sup>, Д. С. ВАЛИОЛДА<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы;

<sup>2</sup>Объединенный Институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия)

## **СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ АТОМНЫХ УРОВНЕЙ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА НЕЙТРОНО-ИЗБЫТОЧНЫХ (ГАЛО) ЯДЕР**

### **Аннотация**

В данной работе для расчета сверхтонкого расщепления используются упрощенный подход к описанию электронной волновой функции иона  $^{11}\text{Be}^+$  и кластерная модель ядра  $^{11}\text{Be}$ . В этом подходе исследуется чувствительность величины сверхтонкой аномалии (СТА) к распределениям магнетизации и заряда в ядре. Показано, что с увеличением зарядового радиуса величина СТА падает и растет с увеличением радиуса магнетизации, которая обусловлена валентным нейтроном. При расчете кулоновского потенциала учитывается конечный размер ядра. С развитием новых экспериментальных методик (получения радиоактивных пучков, разработка ионных ловушек, разработка методик лазерной спектроскопии [5,6]) стало возможным измерение сверхтонкого расщепления в радиоактивных ядрах, в частности, в экзотических (нейтроно- или протоно-избыточных) гало-ядрах.

**Ключевые слова:** гало-ядра, сверхтонкое расщепление, сверхтонкая аномалия.

**Кілт сөздер:** гало-ядролар, аса нәзік түзіліс, аса нәзік ауытқу.

**Keywords:** halo-nuclei, hyperfine splitting, hyperfine anomaly.

**Введение.** Сверхтонкой структурой атомарных уровней называется расщепление электронных уровней, обусловленное взаимодействием магнитного дипольного момента ядра с магнитным полем электронов и электрического квадрупольного момента ядра с неоднородным электрическим полем внутри атома.

На сегодняшний день величина сверхтонкого расщепления, а также связанные с ней величины, например, изотопический сдвиг, измерены для многих ядер, в том числе удаленных от линии стабильности [1-4].

Эти ядра интересны тем, что в отличие от других нестабильных ядер представляют собой связанную систему стабильных фрагментов. Примерами таких ядер могут являться

$^{11}\text{Be}$ , состоящий из кора и валентного нейтрона ( $^{10}\text{Be} + n$ ),  $^8\text{B}$  ( $^7\text{Be}$  и  $p$ ),  $^{11}\text{Li}$  ( $^9\text{Li} + 2n$ ),  $^6\text{He}$  ( $^4\text{He} + 2n$ ) и т.д. Для таких ядер характерны низкие энергии связи валентных нуклонов ( $< 2$  МэВ) по сравнению со средними энергиями связи нуклонов в этих ядрах. Это приводит к широкому пространственному распределению валентных нуклонов.

## 2. Теоретическая модель.

**2.1. Ядерная волновая функция.** В настоящей работе мы рассматриваем сверхтонкое расщепление в Li-подобном ионе  $^{11}\text{Be}^+$ . Как показано в многочисленных работах [3, 7], достаточно хорошей моделью для описания структуры  $^{11}\text{Be}$  является двухчастичная модель. В этой модели ядро  $^{11}\text{Be}$  состоит из кора  $^{10}\text{Be}$  и валентного нейтрона в состоянии  $2S_{1/2}$ . Оба фрагменты кор и нейтрон дают вклад в магнитный момент  $^{11}\text{Be}$ .

Волновая функция их относительного движения имеет вид:

$$\psi_{JM}^{J_x J_y I_y}(\vec{y}) = \sum_{m_{J_x} m_{J_y} m_{I_y} m_s} C_{J_x m_{J_x} J_y m_{J_y}}^{JM} C_{I_y m_{I_y} 1/2 m_s}^{J_y m_{J_y}} \chi_{1/2 m_s} \varphi_{J_x I_x}(\zeta_c) \phi_{J_y I_y m_{I_y}}(\vec{y}), \quad (1)$$

где  $\chi_{1/2 m_s}$  – спиновая функция валентного нейтрона;  $Y_{I_y m_{I_y}}(\Omega \vec{y})$  – сферическая функция, соответствующая относительно орбитальному движению нейтрона и кора с угловым моментом  $I_y$  и проекцией  $m_{I_y}$ ,  $J_y$  и  $m_{J_y}$  – полный момент валентного нейтрона и его проекция.  $\varphi_{J_x I_x}(\zeta_c)$  – внутренняя волновая функция кора  $^{10}\text{Be}$ . Волновая функция валентного нейтрона

$$\phi_{J_y I_y m_{I_y}}(\vec{y}) = R_{J_y I_y}(y) Y_{I_y m_{I_y}}(\Omega \vec{y}), \quad (2)$$

где  $R_{J_y I_y}(y)$  – радиальная часть волновой функции (2).

**2.2. Волновая функция электрона в уравнении Дирака.** Уравнение Дирака в полярной форме записывается как:

$$W\psi = H\psi = \left[ i\gamma_5 \sigma_r \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{\beta}{r} K \right) + V + \beta \right] \psi. \quad (3)$$

Собственная функция Дирак-Кулоновского гамильтониана имеет вид

$$\psi_{kjm_j} = \begin{bmatrix} g(r) \chi_{lk}^{im_j}(\theta, \varphi) \\ if(r) \chi_{l-k}^{im_j}(\theta, \varphi) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

**2.2.1. Решения уравнения Дирака для электрона в кулоновском поле точечного заряда:**

Уравнения Дирака для двух компонентной волновой функции [8]:

$$\begin{cases} \frac{1}{\hbar c} (E - mc^2 - V(r))f + \frac{dg}{dr} - \frac{k}{r}g = 0 \\ \frac{1}{\hbar c} (E + mc^2 - V(r))g + \frac{df}{dr} - \frac{k}{r}f = 0 \end{cases} \quad (5)$$

В случае водородоподобных атомов потенциал:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} = -\frac{Z\alpha\hbar c}{r} \quad (6)$$

Решение системы уравнений находится в виде рядов

$$\left. \begin{aligned} f(\rho) &= e^{-\rho} \sum_{v=0}^{\infty} \rho^{s+v} a_v \\ g(\rho) &= e^{-\rho} \sum_{v=0}^{\infty} \rho^{s+v} b_v \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$E_N = \left[ 1 + \left( \frac{Z\alpha}{N + \sqrt{k^2 - (Z\alpha)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (8)$$

где  $N = 0, 1, 2, \dots$ ;  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

2.2.2. Волновая функция электрона в кулоновском поле ядра конечного размера. В случае конечного ядра, то есть для распределенного заряда, кулоновский потенциал записывается как:

$$V(r) = \frac{Z\alpha\hbar c}{r} \int_0^r \rho_{ch}(x) x^2 dx + Z\alpha\hbar c \int_r^{\infty} \rho_{ch}(x) x dx. \quad (9)$$

где  $\rho_{ch}$  – распределение заряда в ядре.

Распределение заряда в ядре  $^{11}\text{Be}$  записывается через свертку зарядового распределения кора с волновой функцией относительного движения кор-нейтрон:

$$\rho_{ch}(r) = \int |\phi(\vec{x})|^2 Z_c \rho_c \left( \left| \vec{r} - \frac{m_n}{m_n + m_c} \vec{x} \right| \right) d^3 \xi_c, \quad (10)$$

где  $\rho_c$  – плотность заряда кора.

Распределение нейтронов в  $^{11}\text{Be}$ :

$$\rho_n(r) = \int |\phi(\vec{x})|^2 \left[ N_c \rho_c \left( \left| \vec{r} - \frac{m_n}{m_n + m_c} \vec{x} \right| \right) + 1 \right]. \quad (11)$$

Распределение магнетизации:

$$\rho_\mu = \{g_I \mu_N \rho_n\} + \{g_I \mu_I \rho_{ch}\}. \quad (12)$$

В области ядра мы имеем значительное различие в поведении потенциала. Таким образом, можно ожидать, что именно в этой области учет конечного ядра приведет к изменению волновой функции электрона. В этом и состоит эффект сверхтонкой аномалии (см. ниже – формула (23)).

**2.3. Эффект экранирования  $1s$  электронов в  $Li$ -подобном ионе.** Выше мы рассмотрели случай вычисления волновой функции электрона в водородоподобном атоме. В случае  $Li$ -подобного атома необходимо учитывать все три электрона. В общем случае такой учет сводится к решению многочастичной задачи. В наших расчетах мы постараемся свести задачу к двухчастичной, модифицируя потенциал кулоновского взаимодействия.

Экранированный кулоновский потенциал вычисляется из (6) как:

$$V(r) = \frac{Z\alpha\hbar c}{r} \int_0^r |\psi_{12}|^2 x^2 dx + Z\alpha\hbar c \int_r^\infty |\psi_{12}|^2 x dx . \quad (13)$$

Таким образом, экранированный потенциал записывается как:

$$V(r) = \frac{Z\alpha\hbar c}{r} \Phi(r) \quad (14)$$

Функция, учитывающая экранировку имеет вид:

$$\Phi(r) = 1 - \frac{4\pi}{Z} \left\{ \int_0^r \rho_{el}(x) x^2 dx + r \int_r^\infty \rho_{el}(x) x dx \right\} + \frac{C_s}{Z} (81/8\pi)^{1/3} \rho_{el}^{1/3}(r) , \quad (15)$$

где  $\rho_{el}(x) = \int_0^\infty |\psi_{12}|^2 d^3 r_{12}$ , последний член поправка обмена Слэтера, для которого обычно  $C_s = 1$ . Этот потенциал, представленный в интегральной форме, может быть достаточно хорошо аппроксимирован экспоненциальной функцией.

$$V(r) = \frac{z\alpha\hbar c}{r} \frac{1}{2} (e^{-\varpi r} + 1) = \frac{Z_{eff}(r)\alpha\hbar c}{r} , \quad (16)$$

где  $\varpi$  подобрано из условия наилучшего описания экранирующего потенциала. В случае иона  $^{11}Be$  мы имеем  $\varpi = 0.000068 \text{ fm}^{-1}$ . Таким образом, мы введем эффективный заряд, который меняется очень медленно по сравнению с изменением волновой функции. Энергия зависит от радиуса как

$$E(r) = \left[ 1 + \left( \frac{\alpha Z_{eff}(r)}{N + \sqrt{k^2 - (\alpha Z_{eff}(r))^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} . \quad (17)$$

На рисунке 1а и 1б приводятся результаты расчетов волновой функции с учетом (16) и без учета (1а) экранировки. Видно, что в случае экранировки кулоновского потенциала волновая функция (9) электрона примерно в 2 раза шире.

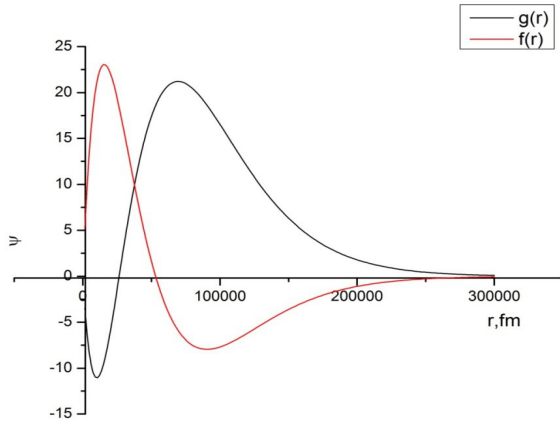


Рисунок 1а – Волновая функция 2s  
электрона, рассчитанная с  
неэкранированным (6)  
кулоновским потенциалом. Красной  
линией показаны  
 $f$  функции и черной линией  $g$  функции

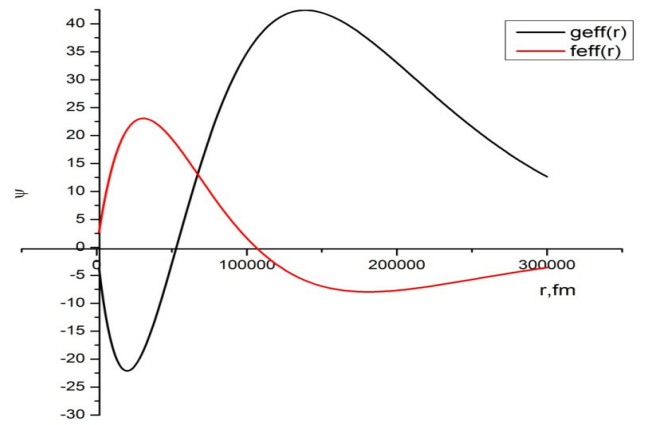


Рисунок 1б – Волновая функция 2s  
электрона,  
рассчитанная с экранированным (16)  
кулоновским потенциалом. Красной линией  
показаны  
 $f$  функции и черной линией  $g$  функции

**2.4. Константа сверхтонкого расщепления (СТР).** Для конечного ядра энергия возмущения выглядит следующим образом:

$$W' = \frac{1}{2} \{F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)\} a_I, \quad (18)$$

где константа сверхтонкого расщепления

$$\begin{aligned} a_I &= -\frac{2ek}{Ij(j+1)} \left\langle \Phi_I^{M_F} \left| \frac{1}{2} \int (R \times J(R))_z d^3R \left\{ \int_{r>R} f_k g_k dr_e + \int_{r>R} \frac{r^3}{R^3} f_k g_k dr \right\} \right| \Phi_I^{M_F} \right\rangle \\ &= -\frac{2ek}{Ij(j+1)} \left\langle \Phi_I^{M_F} \left| \frac{1}{2} \int (R \times J(R))_z d^3R \left\{ \int_0^\infty f_k g_k dr_e - \int_0^R f_k g_k dr_e + \int_0^R \frac{r^3}{R^3} f_k g_k dr \right\} \right| \Phi_I^{M_F} \right\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

Она может быть записана как константа для точечного ядра с поправкой  $a_I^{(I)}$ :

$$a_I = a_I^{(0)} (1 + \epsilon) = a_I^{(0)} + a_I^{(I)} \quad (20)$$

где величина сверхтонкой аномалии (СТА)  $\epsilon$  определяется как:

$$\epsilon = - \frac{\int_0^R f_k g_k dr_e - \int_0^R \frac{r^3}{R^3} f_k g_k dr}{\int_0^\infty f_k g_k dr_e} . \quad (21)$$

Для  $^{11}\text{Be}$  магнитный момент рассчитывается как:

$$\mu = \alpha^2 \mu_v (2S_{1/2}) + \frac{7}{15} \beta^2 \mu_v (1d_{5/2}) - \frac{1}{3} \beta^2 \mu(2^+) \quad (22)$$

где  $\alpha^2$  и  $\beta^2$  – веса. В данной работе мы взяли  $\alpha^2 = 1$ . При этом мы получаем величину магнитного момента  $-1.913\mu_N$ , в то время как экспериментальная величина составляет  $-1.6813(5)\mu_N$  [12].

Для  $^{11}\text{Be}$   $\mu$  и  $\epsilon$ :

$$\mu = -1.913 \cdot \alpha^2 - (0.3585 + 1.1298 g_s^{eff}) \beta^2$$

$$\epsilon = - \frac{g_s^{(n)} S_z \int_0^\infty dR \left( \int_0^R f_k g_k dr - \frac{D_z}{S_z} \int_0^R \frac{r^3}{R^3} f_k g_k dr \right) |\psi_{nucl}(R)|^2 R^2}{\mu_I \int_0^\infty f_k^{(0)} g_k^{(0)} dr} \quad (23)$$

### 3. Результаты расчета для $^{11}\text{Be}$

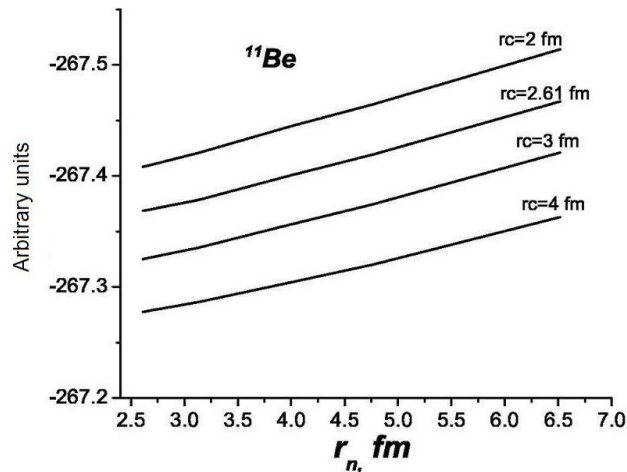


Рисунок 2 – Зависимость  $\epsilon$  от нейтронного радиуса ( $r_n$ ) посчитанная для разных значений зарядового радиуса  $rc$

Мы варьируем нейтронный радиус в пределах от 2 до 7 фм, а зарядовый радиус – от 2 до 4 фм. Характерные изменения величины СТА сравнимы, но имеют разные функциональные зависимости. С увеличением зарядового радиуса абсолютное значение величины СТА падает и растет с увеличением радиуса магнетизации, обусловленной валентным нейтроном (см. рис. 2).

### **Выводы:**

1. С увеличением зарядового радиуса величина СТА падает и растет с увеличением радиуса магнетизации, обусловленной широким распределением валентного нейтрона. Таким образом, при анализе экспериментальных данных по сверхтонкому расщеплению очень важно учитывать разницу в распределениях магнетизации и заряда.

2. В случае экранировки кулоновского потенциала волновая функция (7) электрона в экранированном кулоновском потенциале примерно в 2 раза шире.

3. Необходимо отметить, что оценки величины сверхтонкой аномалии и сверхтонкого расщепления были уже проведены для  $^{11}\text{Be}$  (см. например, [13]). Исследовалась связь зарядового радиуса ядра из величины СТА. При этом радиусы магнетизации и зарядового распределения полагались одинаковыми. Таким образом, до настоящего дня вопрос о различии в распределениях магнетизации и заряда не затрагивался.

### **ЛИТЕРАТУРА**

- 1 Соболевман И.И., Введение в теорию атомных спектров. – М.: ФМ, 1963.
- 2 Johnson J., Sorensen R.A. // Phys. Rev. C **2**, 1970, 102.
- 3 Fujita T., Arima A. // Nucl. Phys. A **254**, 1975, 513.
- 4 Žáková M., Andjelkovic Z. et. al., Isotope shift measurements in the  $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{3/2}$  transition of  $\text{Be}^+$  and extraction of the nuclear charge radii for  $^{7,10,11}\text{Be}$  // J. Phys. G **37**, 2010, 055107.
- 5 Otten E.W., Nuclear radii and moments of unstable isotopes, Treatise on heavy-ion science, Bromley D.A., Editor, 1989, 517-638.
- 6 Kluge H.-J., Atomic physics techniques for studying nuclear ground state properties, fundamental interactions and symmetries: status and perspectives. – Hyperfine Interact. **196**, 2010, 295.
- 7 Parfenova Y., Leclercq-Willain Ch. // Phys. Rev. C **72**, 2005, 024312.
- 8 Давыдов А.С., Квантовая механика. – М.: Наука, 1973. С. 315-319.
- 9 Asaga T. et al., Hyperfine anomaly in hydrogen and hydrogen-like high Z atoms, Nihon University Report No. NUP-98-3, 1998.
- 10 Enders K. et al. // Phys. Rev. A **52**, 1995, 4434.
- 11 Wada M. et al. // Nucl. Phys. A **626**, 1997, 365.
- 12 Nörtershäuser W., Tiedemann D., Žáková M., Nuclear Charge Radii of  $^{7,9,10}\text{Be}$  and the One-Neutron Halo Nucleus  $^{11}\text{Be}$  // Phys. Rev. Lett. – **102**, 2009, 062503.
- 13 Fujita T., Ito K., Suzuki T. // Phys. Rev. C **59**, 1999, 210.

### **REFERENCES**

- 1 Sobel'man I.I., *Vvedenie v teoriju atomnyh spektrov, FM, Moskva, 1963*, (in Russ.).
- 2 Johnson J., Sorensen R.A., *Phys.Rev. C 2*, **1970**, 102.
- 3 Fujita T., Arima A., *Nucl.Phys. A 254*, **1975**, 513.
- 4 Žáková M., Andjelkovic Z. et. al., Isotope shift measurements in the  $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{3/2}$  transition of  $\text{Be}^+$  and extraction of the nuclear charge radii for  $^{7,10,11}\text{Be}$ , *J. Phys. G 37*, **2010**, 055107.
- 5 Otten E.W., Nuclear radii and moments of unstable isotopes, Treatise on heavy-ion science, Bromley D.A., *Editor, 1989*, 517-638.
- 6 Kluge H.J., Atomic physics techniques for studying nuclear ground state properties, fundamental interactions and symmetries: status and perspectives, *Hyperfine Interact. 196*, **2010**, 295.
- 7 Parfenova Y., Leclercq-Willain Ch., *Phys. Rev. C 72*, **2005**, 024312.
- 8 Davydov A.S., Kvantovaja mehanika, *Nauka, Moskva, 1973*, 315-319 (in Russ.).
- 9 Asaga T. et al., Hyperfine anomaly in hydrogen and hydrogen-like high Z atoms, *Nihon University Report No.NUP-98-3*, **1998**.
- 10 Enders K. et al., *Phys.Rev. A 52*, **1995**, 4434.
- 11 Wada M. et al., *Nucl.Phys. A 626*, **1997**, 365.
- 12 Nörtershäuser W., Tiedemann D., Žáková M., Nuclear Charge Radii of  $^{7,9,10}\text{Be}$  and the One-Neutron Halo Nucleus  $^{11}\text{Be}$ , *Phys. Rev. Lett. 102*, **2009**, 062503.
- 13 Fujita T., Ito K., Suzuki T., *Phys. Rev. C 59*, **1999**, 210.

## Резюме

*М. Дінейхан<sup>1</sup>, Ю. Л. Парфенова<sup>2</sup>, С. А. Жаугашева<sup>1</sup>, А. Н. Исадықов<sup>1</sup>, Д. С. Валиолда<sup>1</sup>*

(<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.;

<sup>2</sup>Біріккен ядролық зерттеулер институты, Дубна, Ресей)



# АТОМДЫҚ ДЕНГЕЙЛЕРДІҢ АСА НӘЗІК ТҮЗІЛІСІ ЖӘНЕ НЕЙТРОН САНЫ АРТЫҚ(ГАЛО) ЯДРОЛАРЫНЫҢ ҚҰРЫЛЫМЫ

Бұл жұмыста аса нәзік түзілісіндегі есептеулер жүргізу кезінде  $^{11}\text{Be}^+$  ионының электрондық толқындық функциясын сипаттауға және  $^{11}\text{Be}$  кластерлік үлгісінің оңайтылған әдісі қолданылды. Бұл әдісте ядро зарядының және магниттелуінің таралуына аса нәзік ауытқу шамасының сезімталдығы зерттелінді. Зарядтың таралу радиусы өскен сайын аса нәзік ауытқу шамасы төмендейді, ал валенттік нейтронмен байланысты магниттелу радиусы өскенде – төмендейді. Кулон әлеуетін есептеу барысында ядроның ақырғы өлшемі еске-ріледі.

**Кілт сөздер:** гало ядролар, аса нәзік түзіліс, аса нәзік ауытқу.

## Summary

*M. Dineykan<sup>1</sup>, Yu. L. Parfenova<sup>2</sup>, S. A. Zhaugasheva<sup>1</sup>, A. N. Issadykov<sup>1</sup>, D. S. Valiolda<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Kazakh National University named al-Farabi, Almaty;

<sup>2</sup>Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation

## HYPERFINE SPLITTING OF THE ATOMIC ENERGY LEVELS AND SPATIAL STRUCTURE OF NEUTRON-RICH (HALO) NUCLEI

In this work, the hyperfine splitting is calculated in a simplified approach to description of the  $^{11}\text{Be}^+$  electronic wave function accounting for a cluster structure of nucleus. It is supposed that 1S electrons are in the closed shell, and electronic magnetic moment is created by the third 2S electron. The third electron wave function is calculated with the Coulomb potential screened by the 1S electrons. In the calculations of the Coulomb potential, the cluster structure of the  $^{11}\text{Be}$  nucleus is taken into account. It is assumed that  $^{11}\text{Be}$  is composed by core ( $^{10}\text{Be}$ ) and a valence neutron. The wave function of the neutron-core relative motion is obtained as a solution of the Schrodinger equation.

In this approach, we study the sensitivity of the Breit-Rosenthal correction to the charge and magnetization distributions in  $^{11}\text{Be}$ . It is shown the value of Breit-Rosenthal correction decreases with the charge radius, and increases with radius of magnetization determined (in our approach) by the valence neutron.

**Keywords:** halo nuclei, hyperfine splitting, hyperfine anomaly.

*Поступила 27.03.2013г.*