

М. ДИНЕЙХАН, С. А. ЖАУГАШЕВА,

Г. Г. САЙДУЛЛАЕВА, С. КЕМЕЛЖАНОВА, Н. ХАБЫЛ

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ФОРМФАКТОРА $B(B_S) \rightarrow P(V)$ ПЕРЕХОДА

### Аннотация

В рамках ковариантной модели кварков вычислены формфакторы  $B(B_S) \rightarrow P(V)$  переходов во всей кинематической области квадрата переданного импульса. Работа посвящена актуальной теме «Вычислению формфакторов  $B(B_S) \rightarrow P(V)$  перехода». Основной идеей теоретических исследований в области тяжелых кварков является отделение вклада малых расстояний, описание которых возможно в рамках пертурбативной квантовой хромодинамики (КХД), от вкладов больших расстояний, для описания которых необходимо привлекать непертурбативные методы. Помимо наивной факторизации существуют более продвинутое методы отделения вкладов малых и больших расстояний. Это так называемая КХД факторизация и эффективная теория SCET (Soft-Collinear Effective Theory). Эти подходы выводят теоремы факторизации, которые позволяют дать систематическое описание того или иного процесса в терминах «мягких» и «жестких» матричных элементов.

**Ключевые слова:** факторизация, переход, формфактор.

**Кілтсөздер:** факторизация, ауысу, формфактор.

**Keywords:** factorization, transition, form factor.

**1. Введение.** Наиболее популярным и простым методом является так называемая *наивная* факторизация, основанная на выводе эффективных слабых гамильтонианов, которые описывают слабые переходы кварков и лептонов. Эффективные слабые гамильтонианы представляют собой набор локальных кварк-кварковых и кварк-лептонных операторов, умноженных на так называемые коэффициенты Вильсона (см. обзор [1]). Коэффициенты Вильсона характеризуют динамику малых расстояний и могут быть оценены пертурбативными методами с помощью операторных разложений. При вычислении матричных элементов локальных операторов между начальными и конечными состояниями требуется использовать непертурбативные методы. При этом необходимо знать, каким образом адроны построены из кварков. Технически, любой матричный элемент локального оператора может быть выражен через набор лоренцовских

структур, умноженных на скалярные функции, которые зависят от кинематических переменных. Данные скалярные функции называются формфакторами.

Существует достаточно много теоретических подходов для вычисления необходимых адронных форм-факторов. Упомянем некоторые из них. Считается, что наиболее модельно-независимым подходом является подход правил сумм КХД на световом конусе (см., например, [6, 7]). В рамках подхода правил сумм на световом конусе можно вычислить формфакторы лишь в области достаточно малых переданных импульсов (или больших отдач). Вычисленные формфакторы затем экстраполируются в область больших переданных импульсов (или малых отдач) с помощью полюсных аппроксимаций. В [8] был разработан систематический подход для описания редких распадов  $B \rightarrow K^* l^+ l^-$  в области малых отдач с помощью эффективной теорией тяжелых кварков. Подробный анализ распадов с малой отдачей с использованием данного подхода позднее был проделан в работе [9, 10].

Следует подчеркнуть, что в рамках развиваемой нами ковариантной кварковой модели адронные формфакторы могут быть вычислены во всей кинематической области импульсных переменных.

Таким образом, наша работа построена следующим образом: во втором разделе вычислены различные переходные формфакторы  $B(B_s) \rightarrow P(V)$  переходов во всей кинематической области квадрата переданного импульса.

**2. Переходные формфакторы.** Учитывая тот факт, что все модельные параметры зафиксированы, мы вычислим формфакторы, описывающие переходы тяжелых  $B(B_s)$  мезонов в лёгкие мезоны, например,  $B, B_s \rightarrow \pi, K, \rho, K^*, \phi$ . Эти величины представляют большой интерес из-за необходимости их знания при описании полулептонных, нелептонных и редких распадов  $B$  и  $B_s$  мезонов. Как уже отмечалось во введении, они были вычислены, в частности, в рамках подхода правил сумм на световом конусе в области малых значений переданного импульса, и затем были экстраполированы во всю кинематическую область.

Прежде всего мы дадим определение формфакторов переходов псевдоскаляр и псевдоскаляр-вектор:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle P'_{[\bar{q}_3 q_2]}(p_2) \left| \bar{q}_2 O^\mu q_1 \right| P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \right\rangle = \\
 & = N_c g_P g_{P'} \mathbf{T} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P \left( -(k + \omega_{13})^2 \right) \tilde{\Phi}_{P'} \left( -(k + \omega_{23})^2 \right) \mathbf{T} \\
 & \quad \mathbf{T} \text{tr} \left[ \not{O}^\mu S_1(k + p_1) \gamma^5 S_3(k) \gamma^5 S_2(k + p_2) \right] \mathbf{T} \\
 & \quad = F_+(q^2) P^\mu + F_-(q^2) q^\mu,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle P'_{[\bar{q}_3 q_2]}(p_2) \left| \bar{q}_2 (\sigma^{\mu\nu} q_\nu) q_1 \right| P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \right\rangle = \\
& = N_c g_P g_{P'} \mathbf{T} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P \left( -(k + \omega_{13})^2 \right) \tilde{\Phi}_{P'} \left( -(k + \omega_{23})^2 \right) \Gamma \\
& \quad \Gamma \text{tr} \check{\Psi}^{\mu\nu} q_\nu S_1(k + p_1) \gamma^5 S_3(k) \gamma^5 S_2(k + p_2) \check{\Xi} = \\
& = \frac{i}{m_1 + m_2} (q^2 P_\mu - q \Psi q^\mu) F_T(q^2),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle V(p_2, \xi_2)_{[\bar{q}_3 q_2]} \left| \bar{q}_2 O^\mu q_1 \right| P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \right\rangle = \\
& = N_c g_P g_V \mathbf{T} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_P \left( -(k + \omega_{13})^2 \right) \tilde{\Phi}_V \left( -(k + \omega_{23})^2 \right) \Gamma \\
& \quad \Gamma \text{tr} \check{\Psi} O^\mu S_1(k + p_1) \gamma^5 S_3(k) \xi_2^\dagger S_2(k + p_2) \check{\Xi} = \\
& = \frac{\xi_v^\dagger}{m_1 + m_2} \left( -g^{\mu\nu} P \Psi A_0(q^2) + P^\mu P^\nu A_+(q^2) + q^\mu P^\nu A_-(q^2) + i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha q_\beta V(q^2) \right),
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle V(p_2, \xi_2)_{[\bar{q}_3 q_2]} \left| \bar{q}_2 (\sigma^{\mu\nu} q_\nu (1 + \gamma^5)) q_1 \right| P_{[\bar{q}_3 q_1]}(p_1) \right\rangle = \\
& = \frac{\xi_v^\dagger}{m_1 + m_2} \left( -g^{\mu\nu} P \Psi A(q^2) + P^\mu P^\nu A_+(q^2) + q^\mu P^\nu A_-(q^2) + i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha q_\beta V(q^2) \right) = \\
& = \xi_v^\dagger \left( -(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2) P \Psi a_0(q^2) + (P^\mu P^\nu - q^\mu P^\nu P \Psi / q^2) a_+(q^2) + i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha q_\beta g(q^2) \right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Мы использовали обозначения  $P = p_1 + p_2$  и  $q = p_1 - p_2$ . Для векторных мезонов на массовой поверхности  $\xi_2^\dagger \cdot p_2 = 0$ . И для всех мезонов  $p_i^2 = m_i^2$ . Поскольку имеются три вида кварков, участвующих в переходе, мы ввели два индекса  $\omega_{ij} = m_{q_j} / (m_{q_i} + m_{q_j})$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) так, что  $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 1$ . Формфакторы в уравнении (4) удовлетворяют условию  $a_0(0) = a_+(0)$ , которое гарантирует, что кинематическая сингулярность не возникает в матричном элементе при  $q^2 = 0$ . Для полноты картины мы даём связь наших формфакторов с определениями, используемыми в ряде других работ (см., например, [7]). Эти соотношения имеют следующий вид:

$$F_+ = f_+, \quad F_- = -\frac{m_1^2 - m_2^2}{q^2} (f_+ - f_0), \quad F_T = f_T, \quad A_0 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} A_1, \quad A_+ = A_2, \tag{5}$$

$$A_- = \frac{2m_2(m_1 + m_2)}{q^2} (A_3 - A_0), \quad V = V, \quad a_0 = T_2, \quad g = T_1, \quad a_+ = T_2 + \frac{q^2}{m_1^2 - m_2^2} T_3.$$

Формфакторы (5) удовлетворяют следующим ограничениям

$$A_0(0) = A_3(0), \quad 2m_2 A_3(q^2) = (m_1 + m_2) A_1(q^2) - (m_1 - m_2) A_2(q^2) \tag{6}$$

На рисунках 1–4 мы показали поведение формфакторов, вычисленных в рамках ковариантной кварковой модели во всей кинематической области  $0 \leq q^2 \leq q_{\max}^2$ . Для сравнения мы показали также результаты анализа правил сумм на световом конусе [6]. В Таблице 1, мы собрали наши результаты для формфакторов в точке максимальной отдачи  $q^2 = 0$  и даём для сравнения результаты, полученные в рамках других подходов.

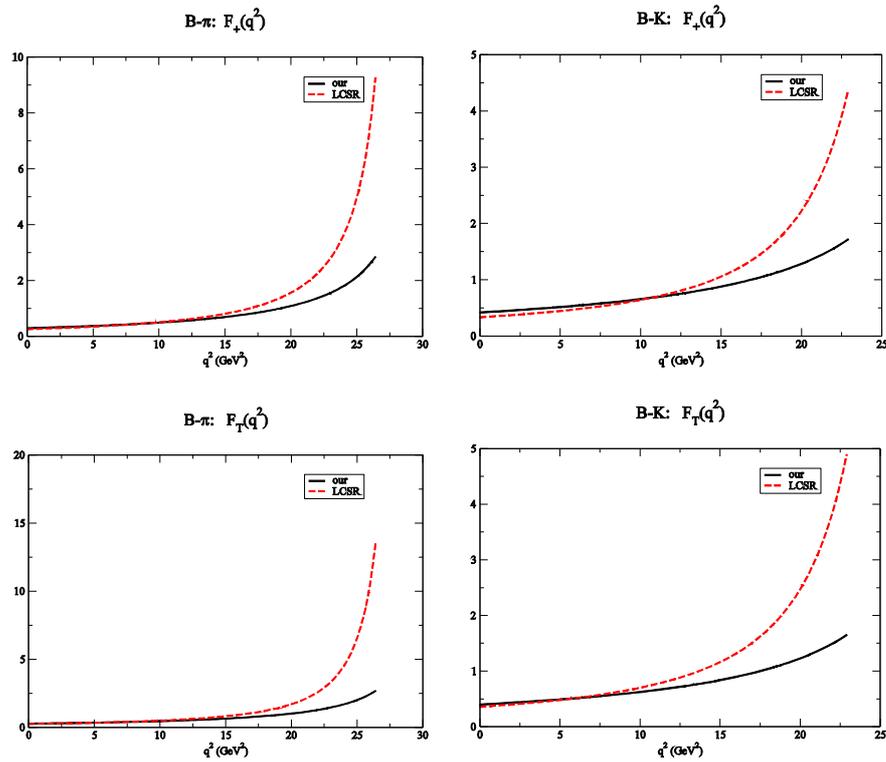
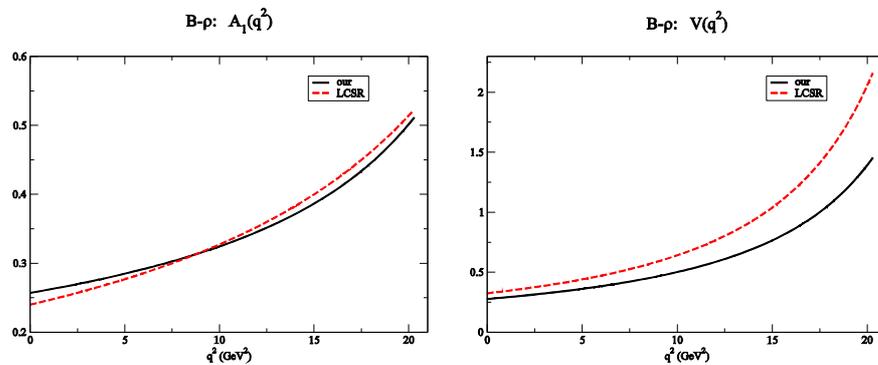


Рисунок 1 – Наши результаты для формфакторов, определённых уравнениями (1) и (2).

Левая панель для  $B$ - $\pi$  перехода; правая панель для  $B$ - $K$  перехода.

Для сравнения приведены кривые работы по правилам сумм на световом конусе [6]



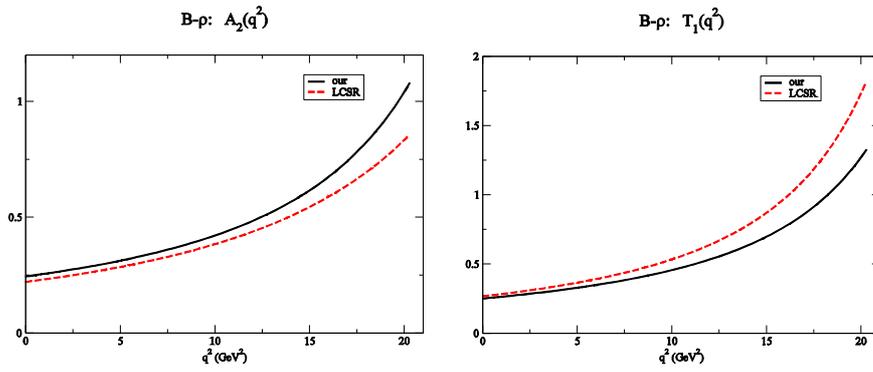


Рисунок 2 – Наши результаты для формфакторов, определенных в уравнениях (3) и (4), для B- $\rho$ -перехода.

Для сравнения мы приводим соответствующие кривые из работы [6]

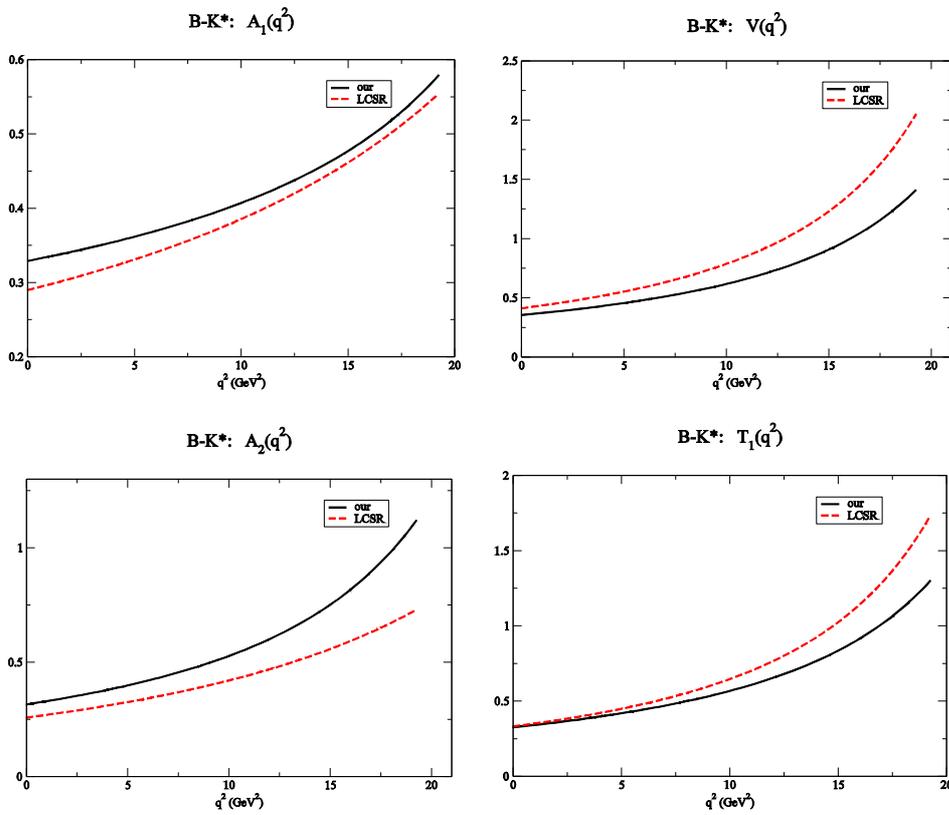
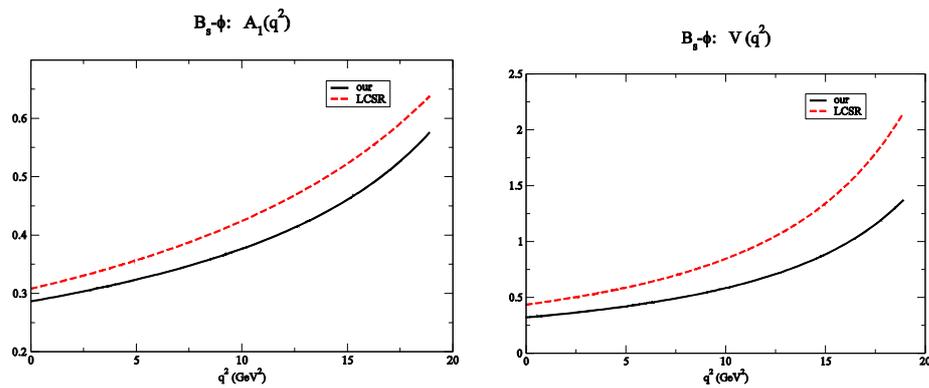


Рисунок 3 – Наши результаты для формфакторов, определенных в уравнениях (3) и (4) для B- $K^*$  перехода. Для сравнения мы приводим соответствующие кривые из работы [6]



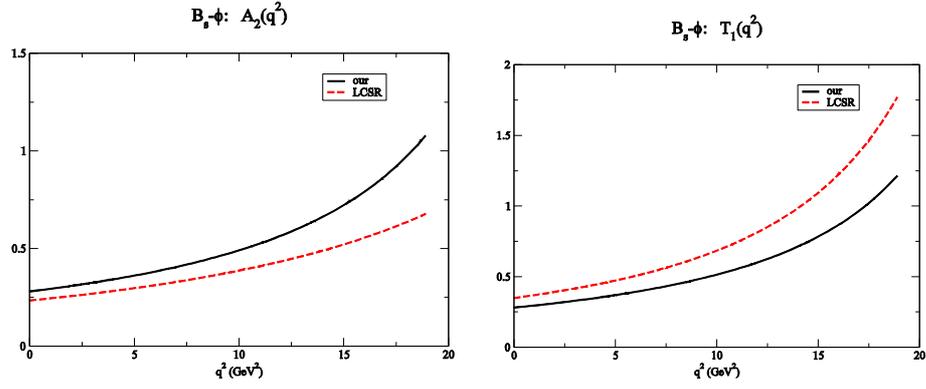


Рисунок 4 – Наши результаты для формфакторов, определенных в уравнениях (3) и (4), для  $B_s$ - $\phi$  перехода. Для сравнения, приводим соответствующие кривые из работы [6].

Как было предложено в работе [9,10], можно проверить, насколько хорошо формфакторы, вычисленные в ковариантной кварковой модели, удовлетворяют трём соотношениям при малой отдаче, полученным в работе [8] для трёх пар формфакторов  $(T_1, V)$ ,  $(T_2, A_1)$  и  $(T_3, A_2)$ . На рисунке 5 мы построили соответствующие отношения

$$R_1 = \frac{T_1(q^2)}{V(q^2)}, \quad R_2 = \frac{T_2(q^2)}{A_1(q^2)}, \quad R_3 = \frac{q^2}{m_B^2} \frac{T_3(q^2)}{A_2(q^2)}, \quad (7)$$

Эти отношения в пределе симметрии тяжёлых кварков и при малой отдаче все должны быть порядка  $1 - (2\alpha_s / (3\pi) \ln(\mu / m_b))$ , т.е. близко к 1.

Из рисунка 5 следует, что так же, как и экстраполированные формфакторы в правилах сумм на световом конусе, формфакторы, полученные в ковариантной кварковой модели, удовлетворяют этим соотношениям достаточно хорошо в случае  $R_1$  и  $R_2$ . Согласие не очень хорошее в случае отношения  $R_3$ .

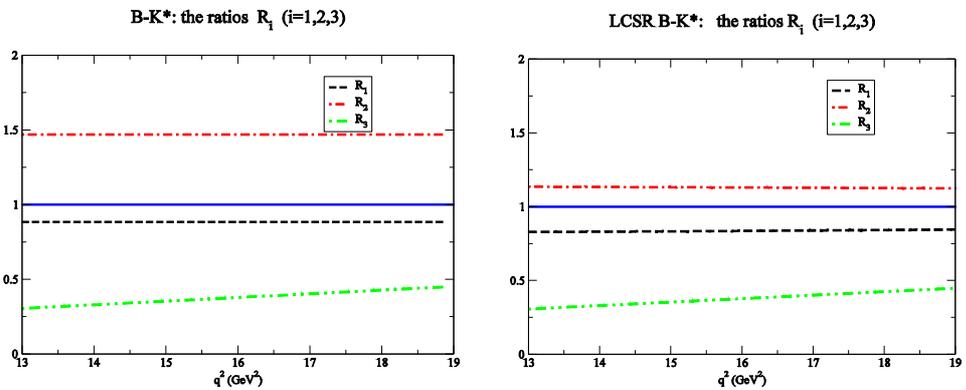


Рисунок 5 – Наши результаты для отношений формфакторов,

определенных в уравнении (7) для  $B-K^*$ -перехода.

Интересно сравнить поведение формфактора для  $B$ - $\pi$ -переходов, вычисленного в нашей модели из трехточечной однопетлевой диаграммы, с поведением модели векторной доминантности (МВД). В случае обычного монополя имеем

$$F_{l\bar{l}l}^{B\pi}(q^2) = \frac{F_+^{B\pi}(0)}{m_{B^*}^2 - q^2},$$

где масса полюса находится вблизи низколежащего состояния  $B^*$ . Соответствующие кривые приведены на рисунке 6. Видно, что имеется сильный рост формфактора модели векторной доминантности в области полюса. Аналогичное поведение имеет место и в случае формфактора, вычисленного в ковариантной кварковой модели.

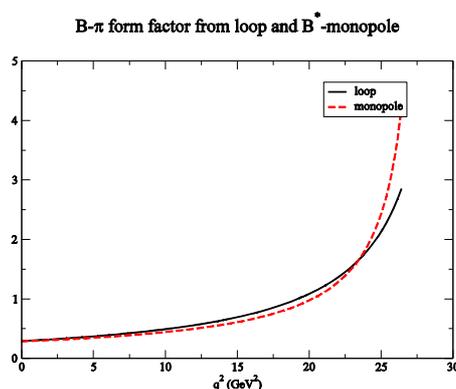


Рисунок 6 – Сравнение формфакторов  $B$ - $\pi$ -перехода,

полученного в ковариантной кварковой модели, с формфактором монопольного типа

Таблица 1 – Формфакторы при  $q^2 = 0$ , вычисленные в различных подходах

	Данная работа	[6]	[7]	[11]	[15]	[112, 113]	[114 ]	[16]
$F_+^{B\pi}(0)$	0.29	$0.258 \pm 0.031$	$0.25 \pm 0.05$	$0.24 \pm 0.05$	$0.24 \pm 0.03$	0.29	0.22	0.27
$F_+^{BK}(0)$	0.42	$0.335 \pm 0.042$	$0.31 \pm 0.04$	$0.30 \pm 0.06$	$0.25 \pm 0.03$	0.36	...	0.36
$F_T^{B\pi}(0)$	0.27	$0.253 \pm 0.028$	$0.21 \pm 0.04$	$0.25 \pm 0.05$	...	0.28	...	...
$F_T^{BK}(0)$	0.40	$0.359 \pm 0.038$	$0.27 \pm 0.04$	$0.32 \pm 0.06$	$0.14 \pm 0.03$	0.35	...	0.34
$V^{B\rho}(0)$	0.28	$0.324 \pm 0.029$	$0.32 \pm 0.10$	$0.31 \pm 0.06$	...	0.31	0.30	...
$V^{BK^*}(0)$	0.36	$0.412 \pm 0.045$	$0.39 \pm 0.11$	$0.37 \pm 0.07$	$0.47 \pm 0.03$	0.44	...	...
$V^{B_s\phi}(0)$	0.32	$0.434 \pm 0.035$	...	...	$0.434 \pm 0.035$	...	...	...
$A_1^{B\rho}(0)$	0.26	$0.240 \pm 0.024$	$0.24 \pm 0.08$	$0.24 \pm 0.05$	...	0.26	0.27	...
$A_1^{BK^*}(0)$	0.33	$0.290 \pm 0.036$	$0.30 \pm 0.08$	$0.29 \pm 0.06$	$0.37 \pm 0.03$	0.36	...	...
$A_1^{B_s\phi}(0)$	0.29	$0.311 \pm 0.029$	...	...	...	...	...	...
$A_2^{B\rho}(0)$	0.24	$0.221 \pm 0.023$	$0.21 \pm 0.09$	$0.25 \pm 0.05$	...	0.24	0.28	...
$A_2^{BK^*}(0)$	0.32	$0.258 \pm 0.035$	$0.26 \pm 0.08$	$0.30 \pm 0.06$	$0.40 \pm 0.03$	0.32	...	...
$A_2^{B_s\phi}(0)$	0.28	$0.234 \pm 0.028$	...	...	...	...	...	...
$T_1^{B\rho}(0)$	0.25	$0.268 \pm 0.021$	$0.28 \pm 0.09$	$0.26 \pm 0.05$	...	0.27	...	...
$T_1^{BK^*}(0)$	0.33	$0.332 \pm 0.037$	$0.33 \pm 0.10$	$0.30 \pm 0.06$	$0.19 \pm 0.03$	0.39	...	...
$T_1^{B_s\phi}(0)$	0.28	$0.349 \pm 0.033$	...	...	...	...	...	...

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Buchalla G., Buras A. J., Lautenbacher M. E. Weak decays beyond leading logarithms, *Rev. Mod. Phys.* **1996**, Vol. 68, P.1125-1144.
- 2 Beneke M., Buchalla G., Neubert M. and Sachrajda C. T. QCD factorization for  $B \rightarrow \pi \pi$  decays: Strong phases and CP violation in the heavy quark limit, *Phys. Rev. Lett.* **1999**, Vol. 83, P.1914.
- 3 Beneke M., Neubert M. QCD factorization for  $B \rightarrow PP$  and  $B \rightarrow PV$  decays, *Nucl. Phys. B*, **2003**, Vol. 675, P.333-415.
- 4 Feldmann T. Soft-Collinear Effective Theory: Recent Results and Applications, *PoS CONFINEMENT 8 007*, **2008**.
- 5 Bauer C. W., Fleming S., Pirjol D., Stewart I. W. An Effective field theory for collinear and soft gluons: Heavy to light decays, *Phys. Rev. D.*, **2001**, Vol. 63, P.114020.
- 6 Ball P. and Zwicky R., *Phys. Rev. D.*, **2005**, Vol. 71, P.014029.
- 108 Khodjamirian A., Mannel T. et.al, *Phys. Rev. D*, **2007**. Vol. 75. P.054013.
- 7 Grinstein B., Pirjol D. Exclusive rare  $B \rightarrow K^* L^+ L^-$  decays at low recoil: Controlling the long-distance effects, *Phys. Rev. D.* **2004**, Vol. 70, P.114005.
- 8 Bobeth C., Hiller G., van Dyk D. The Benefits of  $B \rightarrow K^* L^+ L^-$  Decays at Low Recoil *Journal of High Energy Physics*, **2010**, Vol. 1007, P.098.
- 9 Bobeth C., Hiller G., van Dyk D. More Benefits of Semileptonic Rare B Decays at Low Recoil: CP Violation, *Journal of High Energy Physics*, **2011**, Vol. 1107, P.067.
- 10 Ivanov M. A., Körner J. G., Kovalenko S. G., Roberts C. D. B- to light-meson transition form-factors, *Phys. Rev. D*, **2007**, Vol. 76, P.034018.
- 11 Melikhov D., Nikitin N. and Simula S. Rare exclusive semileptonic  $b \rightarrow s$  transitions in the standard model, *Phys. Rev. D.*, **1998**, Vol. 57, P.6814.
- 12 Melikhov D. Dispersion approach to quark-binding effects in weak decays of heavy mesons, *Eur. Phys. J. direct C.*, **2002**, Vol. 4, P.1.
- 13 Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O. New analysis of semileptonic B decays in the relativistic quark model, *Phys. Rev. D.* **2007**, Vol. 75, P.074008.
- 14 Ladisa M., Nardulli G., Santorelli P. Semileptonic and rare B meson decays into a light pseudoscalar meson, *Phys. Lett. B.* **1999**, Vol. 455, P.283-290.
- 15 Colangelo P., De Fazio F., Santorelli P., Scrimieri E. QCD sum rule analysis of the decays  $B \rightarrow K^* L^+ L^-$  and  $B \rightarrow K^* L^+ L^-$  *Phys. Rev. D.*, **1996**, Vol.53, P.3672-3686.

16 Faessler A., Gutsche T., Ivanov M. A., Körner J. G. and Lyubovitskij V. E. The Exclusive rare decays  $B \rightarrow K(K^*) \dots$  and  $B_c \rightarrow D(D^*) \dots$  in a relativistic quark model, *Eur. Phys. J. direct C.*, **2002**, Vol. 4, P.18.

## Резюме

*М. Дінейхан, С. А. Жауғашева, Г. Г. Сайдұллаева, С. Е. Кемелжанова, Н. Хабыл*

### $B(B_s) \rightarrow P(V)$ АУЫСУДЫҢ ФОРМФАКТОРЫН ЕСЕПТЕУ

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

Коварианттық кварктік үлгі аясында  $B(B_s) \rightarrow P(V)$  ауысулардың формфакторларын берілген импульстың барлық кинематикалық аймағында есептелді. Алынған нәтижелер бар мәндермен жақсы сәйкес келеді. Ауыр кварктардың маңында теориялық зерттеудің негізгі мақсаты аз арақашықтық бойынша петурбативтік кванттық хромодинамиканың сипаты бойынша үлкен арақашықтыққа дейін пертурбативтік емес әдісті қолдану. Аз және үлкен арақашықтық бойынша жақсы жетілген әдістерді қолдану. Атап айтқанда, КХД-дағы факторизация және SCET (Soft-Collinear Effective Theory) тиімді теориясы. Бұл тәсілдер факторизация теоремасы бойынша «жеңіл» және «қатты» элементтерге жүйелік сипаттама береді.

**Кілтсөздер:** факторизация, ауысу, формфактор.

## Summary

*M. Dineykhan, S. A. Zhaugasheva, G. G. Saidullaeva, S. E. Kemelzhanova, N. Habyl*

(Al-Farabi Kazak National University, Almaty)

THE CALCULATION OF THE  $B(B_s) \rightarrow P(V)$  TRANSITION FORM FACTOR

As part of the covariant quark model [1] calculated form factors of transitions throughout the kinematic region of the square of the momentum transfer. The results are in good agreement with the existing data. Within covariant model of quarks factors of transitions in all kinematic area of a square of the transferred impulse are calculated a form. Work is devoted to a hot topic to «Calculation of formfaktor of  $B(B_s) \rightarrow P(V)$  transition». The main idea of theoretical researches in the field of heavy quarks is the office of a contribution of the small distances which description is possible within perturbative quantum chromodynamics (KHD), from deposits of long distances for which description it is necessary to attract not perturbative methods. Besides naive factorization there are more advanced methods of office of deposits of small and long distances. It is so-called KHD factorization and the effective theory of SCET (Soft-Collinear Effective Theory). These approaches output factorization theorems which allow to give the systematic description of this or that process in terms of «soft» and «zhyostsky» matrix elements.

**Keywords:** factorization, transition, form factor.

*Поступила 27.03.2013г.*