УДК 530.145.6

*М. ДИНЕЙХАН, С. А. ЖАУГАШЕВА, А. Т. САРСЕМБАЕВА*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ И РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВОК К СПЕКТРУ $\mu$ - АТОМА

Предложен рецепт определения энергетического спектра, связанного состояния с учетом релятивистских эффектов. Определен релятивистский гамильтониан, который зависит от конституентных масс частиц в связанном состоянии. В рамках нашего подхода аналитически определены конституентные массы связанных состояний. Мы показали, что конституентная масса частиц отличается от массы свободного состояния. Также определен энергетический спектр для любых орбитальных и радиальных возбуждений. С учетом одно и двухпетлевого приближений определены поправки к энергетическому спектру с орбитальным и радиальным возбуждением.

**Введение.** При описании свойств и механизма формирования релятивистских связанных состояний, необходимо выполнение условия лоренцевой инвариантности. В настоящее время релятивистский характер взаимодействия описываются в рамках квантовой теории поля (КТП) [1]. В КТП лоренцева инвариантность выполняется. Однако, при описании свойств системы, т.е. при определения энергетического спектра связанных состояний в рамках КТП, мы сталкиваемся с известными трудностями [1]. С другой стороны известно, что энергетический спектр связанного состояния с хорошей точностью определяется в рамках нерелятивистской квантовой механики. Однако в нерелятивистской квантовой механике (НКМ) условия релятивистской инвариантности не выполняется. Одной из первых попыток описания энергетического спектра связанного состояния в рамках КТП сделано Швингером [2] и Бете-Солпетером [3], используя ковариантное представление функции Грина. Хотя полученное уравнение является большим достижением, но вычисления энергетического спектра конкретного связанного состояния оказывается весьма, трудным, а улучшение точности численного результата оказывается невозможным. С другой стороны известно, что переход к системе центра масс при описании свойств связанных состояний возможно только в рамках НКМ. Таким образом, описания свойств и определение энергетического спектра связанного состояния с учетом релятивистского характера взаимодействия является одной из актуальных проблем современности.

В данной работе предложен один из альтернативных вариантов описания механизма формирования связанных состояний с учетом релятивистских характеров взаимодействия. В нашем подходе исследуя асимптотическое поведение функции поляризационной петли для n заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле, определим массу связанного состояния. При определении асимптотического поведения функций – петля используем представление интеграла по путям для функции Грина и проведем усреднение по внешнему калибровочному полю. В результате этих операций для функции – петля получаем представление, похожее на Фейн-мановский функциональный интеграл по путям, полученный в нерелятивистской квантовой механике для связанного состояния, состоящего из n заряженных скалярных частиц. При этом потенциал взаимодействия определяется диаграммой Фейнмана, как для фотонного обмена, так и для диаграммы собственной энергии. Таким образом, потенциал взаимодействия определяется вкладом все возможных типов диаграмм Фейнмана.

С другой стороны, в работе [4] энергетический спектр кулоновского связанного состояния, прежде всего, определен в рамках квантовой электродинамики (КЭД) с соответствующей диаграммой Фейнмана, с учетом перенормировки и последующим переходом к нерелятивистскому пределу. В результате такого определения, в потенциале взаимодействия, содержатся соответствующие релятивистские поправки. Детали такого перехода к нерелятивистской КЭД изложены в работе [5] и в настоящий момент широко используются при кулоновской системе (под. см. в [6]). Однако, в этом подходе проводят разложение величины

$$\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}=m+\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}-\frac{\vec{p}^{\,4}}{8m^3}+\dots$$

и ограничиваются только слагаемым, соотВ ре5.

ствующий третьему порядку разложения. А в нашем подходе мы не проводили разложение, и таким образом не нарушается условия релятивистской инвариантности.

В данной работе в рамках нашего подхода будет определено расщепление энергетических уровней 2P и 2S водородного мюона. Расщепление энергетического уровня водородного мюона является одним из чувствительных эффектов в КЭД.

Работа построена следующим образом, во втором изложены детали нашего формализма, который посвящены к определению массового спектра связанного состояния с учетом релятивистических эффектов. В третьем пункте вычислено расщепление энергетического уровня водородного мюона с одно- и двухпетлевой приближения, в заключение подытожим полученные результаты. А в приложении – детали вычисления ОП.

**1. Определение массового спектра релятивистского связанного состояния, состоящего из n-частиц.** Рассмотрим взаимодействие $n$ заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. Массу связанного состояния определим на основе исследования асимптотического поведения функции поляризационной петли для $n$ заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. Функции поляризационной петли для $n$ скалярных частиц записываются следующим образом:

$$\Pi(x-y) = \langle G_{m1}(x,y|A) G_{m2}(y,x|A) \times \times G_{m3}(x,y|A) \ldots G_{mn}(x,y|A) \rangle_A . \qquad (1.1)$$

Здесь проводится усреднение по внешнему калибровочному полю $A_\alpha(x)$. Функция Грина $G_m(x,y|A)$ для скалярной частицы во внешнем калибровочном поле определяется из уравнения:

$$\left[ \left( i\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{g}{c\hbar} A_\alpha(x) \right)^2 + \frac{c^2 m^2}{\hbar^2} \right] G_m(x,y|A) = = \delta(x-y), \qquad (1.2)$$

где $m$ – масса скалярной частицы, а $g$ – константа связи. При усреднении по внешнему калибровочному полю $A_\alpha(x)$ ограничиваемся только низшим порядком, т.е. учитываем только двухточечный Гауссовый коррелятор:

$$\langle \exp\left\{ i \int dx A_\alpha(x) J_\alpha(x) \right\} \rangle_A = \qquad (1.3)$$

$$= \exp\left\{ -\frac{1}{2} \iint dx dy J_\alpha(x) D_{\alpha\beta}(x-y) J_\beta(y) \right\}.$$

Здесь $J_\alpha(x)$ – реальный ток, а $D_{\alpha\beta}(x-y)$ – пропогатор калибровочного поля:

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \langle A_\alpha(x) A_\beta(y) \rangle_A . \qquad (1.4)$$

Решение уравнения (1.2) представляется в виде функционального интеграла (детали см. в [7]):

$$G_m(x, y/A) = \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi s)^2} \exp\left\{ -sm^2 - \frac{(x-y)^2}{4s} \right\} \times$$

$$\times \int d\sigma_B \exp\left\{ ig \int_0^\infty d\xi \frac{\partial Z_\alpha(\xi)}{\partial \xi} A_\alpha(\xi) \right\}, \quad (1.5)$$

где введены обозначения:

$$Z_\alpha(\xi) = (x-y)_\alpha + y_\alpha - 2\sqrt{s} B_\alpha(\xi), \quad (1.6)$$

$$d\sigma_B = N\delta B \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 d\xi B^2(\xi) \right\},$$

с нормировкой:

$$B_\alpha(0) = B_\alpha(1) = 0, \quad \int d\sigma_B = 1.$$

Подставляя (1.5) в (1.1) и проводя усреднение по внешнему фоновому полю $A_\alpha(x)$ для функции петли, имеем:

$$\Pi(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int \frac{d\mu_1 d\mu_2 \ldots d\mu_n}{(8\pi^2 x)^n} \cdot J(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_1^2}{\mu_1} + \mu_1\right) - \frac{|x|}{2}\left(\frac{m_2^2}{\mu_2} + \mu_2\right) - \ldots - \frac{|x|}{2}\left(\frac{m_n^2}{\mu_n} + \mu_n\right) \right\}. \qquad (1.7)$$

Здесь

$$J(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = N_1 N_2 \ldots N_n \iint \ldots \int \delta\vec{r}_1 \delta\vec{r}_2 \ldots \delta\vec{r}_n \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x d\tau \left[ \mu_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}(\tau) + \mu_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}(\tau) + \ldots + \mu_n \dot{\vec{r}}_n^{\,2}(\tau) \right] \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ -W_{1,1} - W_{2,2} - \ldots - W_{n,n} + 2 \sum_{i,j=1; i\neq j}^{n} W_{i,j} \right\}, \quad (1.8)$$

где

$$W_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{g^2}{2} \int\int_0^x d\tau_1 d\tau_2 Z_\alpha^{(i)}(\tau_1) \times$$

$$\times D_{\alpha\beta} \{Z^{(i)}(\tau_1) - Z^{(j)}(\tau_2)\} Z^{(j)}(\tau_2). \quad (1.9)$$

Мы определили функцию-петли, для $n$ скалярных частиц с массами $m_1, m_2, ..., m_n$, которые взаимодействуют между собой обменным калибровочным полем. Существует два типа взаимодействий: первое – взаимодействие составляющих частиц посредством калибровочного поля, вклад которого определяется непосредственно $W_{i,j}$ $(j \neq i)$, второе – взаимодействие составляющих частиц самих с собой, т.е. диаграмма собственной энергии, вклад которой определяется $W_{1,1}, W_{2,2}, ..., W_{n,n}$. В нерелятивистском пределе величина $W_{i,j}$ $(j \neq i)$, соответствует потенциальным взаимодействиям, а $W_{1,1}, W_{2,2}, ..., W_{n,n}$ соответствуют непотенциальным взаимодействиям, которые определяют вклад в массу собственной энергии. С другой стороны, функциональный интеграл (1.8) похож на Фейнмановский интеграл по траекториям для движения $n$ скалярных частиц с массами $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ в нерелятивистской квантовой механике [8]. Взаимодействие между этими частицами описывается выражением (1.9), которое содержит как потенциальные, так и непотенциальные взаимодействия.

Нашей задачей является определение массы связанного состояния с учетом релятивистской инвариантности. Массу связанного состояния обычно определяют через функцию – петли $\Pi(x)$ следующим образом:

$$M = -\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \Pi(x)}{|x|}. \quad (1.10)$$

Из (1.10) видно, что для определения массы связанного состояния, прежде всего нам нужно определить функцию – петли $\Pi(x)$ в асимптотике $|x| \to \infty$. С другой стороны, согласно (1.9) гамильтониан взаимодействия $n$ – скалярных частиц с массами $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ записывается в виде

$$H = \frac{1}{2\mu_1} \vec{P}_1^2 + \frac{1}{2\mu_2} \vec{P}_2^2 + ... +$$

$$+ \frac{1}{2\mu_n} \vec{P}_n^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n), \quad (1.11)$$

где $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n)$ потенциал взаимодействия, который выражается через $W_{i,j}$. Из уравнения Шредингера

$$H\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n) =$$

$$= E(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n), \quad (1.12)$$

будем определять собственное значение гамильтониана.

Если $E(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ являются собственными значениями гамильтониана (1.11) и определяются из уравнения (1.12), то интеграл, представленный в (1.8) в асимптотике $|x| \to \infty$, можно записывать в виде

$$\lim_{|x| \to \infty} J(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) =$$

$$= \exp\{-xE(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)\}. \quad (1.13)$$

В этом приближении интеграл, представленный в (1.7) вычисляется методом перевала, тогда из (1.10) для массы связанного состояния получаем:

$$M = \frac{1}{2} \min_{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n} \left\{ \frac{m_1^2}{\mu_1} + \mu_1 + \frac{m_2^2}{\mu_2} + \mu_2 + ... + \right.$$

$$\left. + \frac{m_n^2}{\mu_n} + \mu_n + 2E(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \right\}, \quad (1.14)$$

а для $\mu_j$ имеем следующую систему уравнений

$$\mu_j - \frac{m_j^2}{\mu_j} + 2\mu_j \frac{dE(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)}{d\mu_j} = 0;$$

$$j = 1, 2, ..., n. \quad (1.15)$$

Параметры $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ рассматриваются как массы составляющих в связанном состоянии. Эти массы отличаются от $m_1, m_2, ..., m_n$ – масс исходного (свободного) состояния.

При дальнейших вычислениях, для удобства вводим приведенную массу двух-, трех- и $n$-тельных систем следующим образом:

$$\frac{1}{M_2}=\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2};$$

$$\frac{1}{M_3}=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}; \qquad (1.16)$$

$$\frac{1}{M_4}=\frac{1}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}+\frac{1}{\mu_4};$$

$$\vdots\ \vdots\ \vdots$$

$$\frac{1}{M_n}=\frac{1}{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}}+\frac{1}{\mu_n}.$$

Тогда массовый спектр связанного состояния определяется в виде:

$$M=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+$$
$$+M_2\frac{dE}{dM_2}+M_3\frac{dE}{dM_3}+\ldots+M_n\frac{dE}{dM_n}. \qquad (1.17)$$

В этом случае конституентные массы $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ определяются из следующей системы уравнений:

$$1-\frac{m_1^2}{\mu_1^2}+\frac{2M_2^2dE}{\mu_1^2dM_2}+\frac{2M_3^2\ dE}{(\mu_1+\mu_2)^2dM_3}+\ldots+$$
$$+\frac{2M_n^2\quad dE}{(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1})^2dM_n}=0;$$

$$1-\frac{m_2^2}{\mu_2^2}+\frac{2M_2^2dE}{\mu_2^2dM_2}+\frac{2M_3^2\ dE}{(\mu_1+\mu_2)^2dM_3}+\ldots+$$
$$+\frac{2M_n^2\quad dE}{(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1})^2dM_n}=0;$$

$$1-\frac{m_3^2}{\mu_3^2}+\frac{2M_3^2dE}{\mu_3^2dM_3}+\frac{2M_4^2\ dE}{(\mu_1+\mu_2+\mu_3)^2dM_4}+\ldots+$$
$$+\frac{2M_n^2\quad dE}{(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1})^2dM_n}=0;$$

$$\vdots\ \vdots\ \vdots$$

$$1-\frac{m_{n-1}^2}{\mu_{n-1}^2}+\frac{2M_{n-1}^2dE}{\mu_{n-1}^2dM_{n-1}}+\frac{2M_n^2\quad dE}{(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1})^2dM_n}=0;$$

$$1-\frac{m_n^2}{\mu_n^2}+\frac{2M_n^2dE}{\mu_n^2dM_n}=0. \qquad (1.18)$$

Из (1.17) и (1.18) видно, что для определения масс и конституентных масс релятивистского связанного состояния, прежде всего, нужно определить $E(M_2,M_3,\ldots,M_n)$ из (1.12).

Система уравнений, представленная в (1.18) при конкретных значениях $n$, определяется аналитически, в частности, для $n=2$ имеем:

$$M=\mu_1+\mu_2+M_2\frac{dE}{dM_2}+E(M_2);$$

$$\mu_1=\sqrt{m_1^2-2M_2^2\frac{dE}{dM_2}};$$

$$\mu_2=\sqrt{m_2^2-2M_2^2\frac{dE}{dM_2}} \qquad (1.19)$$

$$\frac{1}{M_2}=\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}$$

для $m=3$, из (1.18), получаем

$$M=\mu_1+\mu_2+\mu_3+$$
$$+M_2\frac{dE}{dM_2}+M_3\frac{dE}{dM_3}+E(M_2,M_3);$$

$$\mu_3=\sqrt{m_3^2-2M_3^2\frac{dE}{dM_3}};$$

$$\mu_j=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{m_j^2-2M_2^2\frac{dE}{dM_2}}\times \qquad (1.20)$$
$$\times\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{8M_2^2M_3^2(dE/dM_3)}{(m_1^2-2M_2^2(dE/dM_2))(m_2^2-2M_2^2(dE/dm_2)}}};$$

$$\frac{1}{M_2}=\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2};\ \frac{1}{M_3}=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}+\frac{1}{\mu_3};\ j=1{,}2.$$

Таким образом, мы можем определить массу и конституентную массу связанного состояния с учетом релятивистских эффектов.

**2. Определение расщепления энергетического уровня мюонного водорода.** Мюонный водород $(\mu H)$ является связанной системой мюона и протона. Расщепление энергетического уровня водородного мюона является одним из чувствительных эффектов в КЭД.

Теперь вычислим поправки к уровню энергии мюонного водорода. Уровень энергии мюонного водорода без каких-либо поправок, определяется как

$$E(M_2) = -\frac{M_2\alpha_{em}^2}{2n^2}, \qquad (2.1)$$

где $M_2$ – приведенная масса. Ниже в числовых вычислениях мы будем использовать следующие значения масс и физических констант:

$$m_p = 1836.152672 m_e;$$
$$m_\mu = 206.76824065 m_e;$$
$$m_d = 3670.483014 m_e; \qquad (2.2)$$
$$\alpha_{em} = 1/137.0359911;$$
$$R_\infty = m_e\alpha_{em}^2/2 = 13.6056923 эВ.$$

Из (1.19) мы определяем конституентную массу протона и мюона, а также их приведенную массу:

$$\mu_p = 1836.1527972 m_e;$$
$$\mu_m = 206.7693525 m_e; \qquad (2.3)$$
$$M_2 = 185.84169985 m_e.$$

Из (2.2) и (2.3) мы видим, что масса и конституентная масса протона и мюона, отличается массами по свободному состоянию. Основные поправки Лэмбовскому сдвигу в мюонном водороде определяются вкладом однопетлевой поправки [6].

**Одно – петлевая поправка.** Поправки к уровням энергии мюонного водорода вычислили много авторов в рамках НРКЭД [6]. Самый главный КЭД эффект у мюонного водорода – это виртуальное рождение и уничтожение одной $e^+e^-$ пары. Из-за вклада электронной поляризации в пропагатор фотона следует поправка к потенциалу Кулона, написанную в виде [9],

$$\delta V_{VP}^{(1)} = -\frac{g_1}{r}\int_1^\infty d\zeta e^{-2m_e r\zeta} w_1(\zeta), \qquad (2.4)$$

где мы использовали обозначения

$$g_1 = Z\alpha\frac{2\alpha}{3\pi}; \;\; w_1(\zeta) = \left(1+\frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}. \qquad (2.5)$$

Соответствующая поправка к уровню энергии рассчитана численно для произвольной $n$. Аналитически это было вычислено для более низких уровней $n = 1,2,3$. Аналитические результаты для всех состояний с $n = 1+l$ были получены в [10]. Теперь вычислим энергетический спектр мюонного водорода, принимая во внимание электронную поляризацию. Согласно (2.4), УШ может быть написано как

$$\left[\frac{1}{2M_2}\cdot\vec{P}^2 - \frac{Z\alpha}{r} - \frac{g_1}{r}\int_1^\infty d\zeta e^{-2m_e r\zeta} w_1(\zeta)\right]\Psi =$$
$$= E(M_2)\Psi, \qquad (2.6)$$

где $M_2$ – приведенная масса.

Для определения энергетического спектра $E(M_2)$, применим метод ОП. Перед тем как определить энергетический спектр и волновую функцию из УШ с помощью метода ОП [11], уместно напомнить, что этот метод основан на идеях и методах квантовой теории скалярного поля. Одним из существенных отличий квантовой теории поля (КТП) от КМ является то, что квантованные поля, представляющие набор бесконечного числа осцилляторов для основного состояния или вакуума, при квантово-полевом взаимодействии сохраняют свою осцилляторную природу. В КМ собственные функции для большинства потенциалов, как правило, отличаются от гауссовского поведения осцилляторной волновой функции. Поэтому для применения методов и идеи КТП к решению квантово-механических задач следует в исходном радиальном УШ провести замену переменных таким образом, чтобы искомая волновая функция на больших расстояниях обладала гауссовым поведением. Затем преобразованное уравнение идентифицируется с радиальным УШ в пространстве с большой размерностью [11].

В соответствии с изложенным выше проведем замену переменных следующим образом (детали см. в [11]):

$$r = q^2, \;\; \Psi \Rightarrow \Psi(q^2) = q^{2l}\cdot\Phi(q^2), \qquad (2.7)$$

Используя атомную систему единиц ($\hbar = 1, \quad e = 1, \quad c = 1$), получим из (3.1) для УШ:

$$\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q}\frac{\partial}{\partial q}\right) - 4M_2 Z\alpha - 4M_2 E q^2 - \right.$$
$$\left. - 4M_2 g_1\int_1^\infty d\zeta e^{-2m_e q^2\zeta} w_1(\zeta)\right\}\Phi(q^2) = 0, \qquad (2.8)$$

где $d$ – размерность вспомогательного пространства:

$$d = 4 + 4l. \qquad (2.9)$$

В результате замены переменных мы получили модифицированное уравнение Шредингера в $d$-мерном вспомогательном пространстве $R^d$. Из (2.7) и (2.8) следует, что орбитальное квантовое число $l$ вошло в определение размерности пространства $d$. Данный прием позволяет определить все интересующие нас характеристики, а именно, спектр и волновую функцию, решая модифицированное УШ только для основного состояния в $d$-мерном вспомогательном пространстве $R^d$. Волновая функция $\Psi_m(q^2)$ основного состояния в $R^d$ зависит только от переменных $q^2$. Поэтому оператор:

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \equiv \Delta_q, \qquad (2.10)$$

отождествим с лапласианом $\Delta_q$ во вспомогательном пространстве $R^d$, который действует на волновую функцию основного состояния, зависящую только от радиуса $q^2$. Собственное значение гамильтониана модифицированного УШ

$$H\Phi(q) = \varepsilon(E)\Phi(q) , \qquad (2.11)$$

равно нулю. Поэтому искомое значение энергии определяется уравнением

$$\varepsilon(E) = 0 , \qquad (2.12)$$

Будем рассматривать это соотношение как условие определения энергетического спектра $E$ гамильтониана. Следуя методу ОП [11], представим канонические переменные через операторы рождения ($a^+$) и уничтожения ($a$) в пространстве $R^d$:

$$q_j = \frac{a_j + a_j^+}{\sqrt{2\omega}}; \quad P_j = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{a_j - a_j^+}{i};$$

$$j = 1,...,d, \quad [a_i, a_j^+] = \delta_{i,j}, \qquad (2.13)$$

где $\omega$ – частота осциллятора, которая пока неизвестна. Подставляя (2.13) в (2.11) и упорядочивая по операторам рождения и уничтожения, получаем

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E) + H_I . \qquad (2.14)$$

Здесь $H_0$ является гамильтонианом свободного осциллятора

$$H_0 = \omega(a_j^+ a_j) = \omega(a^+ a); \qquad (2.15)$$

а $\varepsilon_0$ – энергия основного состояния в нулевом приближении ОП [11], которая имеет вид

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} - \frac{2dEM_2}{\omega} - 4M_2 Z\alpha -$$

$$- 4M_2 g_1 \int_1^\infty d\zeta \frac{w_1(\zeta)}{(1 + 2m_e\zeta/\omega)^{d/2}} . \qquad (2.16)$$

Гамильтониан взаимодействия $H_I$ также представляется в нормальной форме по операторам рождения и уничтожения, причем он не содержит квадратичных слагаемых по каноническим переменным:

$$H_I = -4M_2 g_1 \int_1^\infty w_1(\zeta) \cdot \int \left( \frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \times$$

$$\times \exp\{-\eta^2(1 + 2m_e\zeta/\omega)\} : e_2^{-2i\sqrt{2m_e\zeta}(\eta q)} : . \qquad (2.17)$$

Здесь :*: является символом нормального упорядочения, и мы использовали обозначение

$$e_2^{-x} = e^{-x} - 1 + x - \frac{1}{2} \cdot x^2 .$$

Некоторые детали представления гамильтониана в нормальной форме приведены в Приложении А.

Вклад гамильтониана взаимодействия $H_I$ рассматривается как малое возмущение. В квантовой теории поля после представления гамильтониана взаимодействия в нормальной форме требование отсутствия в нем полевых операторов второй степени по существу эквивалентно перенормировкам массы и волновой функции [12]. Такая процедура позволяет учесть основной квантовый вклад через перенормировку масс и энергии вакуума. Другими словами, все квадратичные формы полностью включены в гамильтониан свободного осциллятора. Данное требование позволяет сформулировать согласно осцилляторному представлению, условия [11]

$$\frac{\partial \varepsilon_0(E)}{\partial \omega} = 0 , \qquad (2.18)$$

для нахождения частоты $\omega$ свободного осциллятора, которые определяют основной квантовый вклад. Таким образом, учитывая (2.12), из уравнений (2.9) и (2.17), мы можем определить энергию $E$ связанного состояния.

В ОП первая поправка по гамильтониану взаимодействия тождественно равна нулю, в то время как вторая поправка составляет менее одного процента, и ряд теории возмущения быстро сходится. Эти результаты были проверены для различных видов потенциалов [13], и показана высокая точность нулевого приближения ОП. Поэтому при дальнейших вычислениях мы будем ограничиваться рассмотрением только нулевого приближения ОП. В этом случае из (2.18) получаем:

$$\frac{d\omega}{4}+\frac{2dEM_2}{\omega}- \tag{2.19}$$

$$-4M_2g_1\int_1^\infty d\zeta\frac{w_1(\zeta)}{(1+2m_e\zeta/\omega)^{1+d/2}}\frac{dm_e\zeta}{\omega}=0.$$

Мы применяем метод ОП, чтобы вычислить энергетический спектр мюонного водорода с орбитальными и радиальными возбуждениями. Орбитальное квантовое число $l$ поглощено параметром $d$. Мы можем определить волновую функцию с радиальным возбуждением в форме:

$$|n_r\rangle=C_{n_r}(a^+a^+)^{n_r}|0\rangle, \tag{2.20}$$

то, где $|0\rangle$ – волновая функция основного состояния, и $C_{n_r}$ – нормировочная константа:

$$C_{n_r}=\left[\frac{\Gamma(d/2)}{4^{n_r}n_r!\Gamma(d/2+n_r)}\right]^{1/2}. \tag{2.21}$$

Энергетический спектр с радиальным возбуждением может быть определен как

$$\varepsilon_{n_{rr}}(E)=\langle n_r|H|n_r\rangle=$$

$$=\varepsilon_0(E)+2n_r\omega+\langle n_r|H|n_r\rangle. \tag{2.22}$$

Детали вычисления матричного элемента $\langle n_r|H|n_r\rangle$ приведены в приложении А, и представлены в виде:

$$\langle n_r|H|n_r\rangle=-4M_2g_1\int_1^\infty d\zeta w_1(\zeta)T_{n_r}\left(\frac{2m_e\zeta}{\omega}\right).$$

(2.23)

Принимая во внимание (2.16), (2.22) и (2.23) из уравнения системы, представленных в (2.12) и (2.18) после некоторых вычислений, мы получили частоту осциллятора

$$\omega=\frac{2M_2Z\alpha}{n}+\frac{2M_2g_1}{n}\int_1^\infty d\zeta w_1(\zeta)\times \tag{2.24}$$

$$\times\left[\frac{1}{(1+\eta\zeta\beta)^{d/2}}+\frac{0.5d\ n\zeta\beta}{(1+n\zeta\beta)^{1+d/2}}+T_{n_r}(n\zeta\beta)\right],$$

где $n=1+n_r+l$ называют основным квантовым числом, и используется обозначение: $\beta=m_e/(M_2Z\alpha)$. Согласно (2.23), энергетический спектр для любого $n$ определяется из уравнения:

$$2\omega+\varepsilon_0(E)-$$

$$-\frac{2M_2g_1}{n}\int_1^\infty d\zeta w_1(\zeta)T_{n_r}(n\zeta\beta)=0, \tag{2.25}$$

где $\varepsilon_0(E)$ представлен в (2.16).

$$\Delta E(2p-2s)=M_2\frac{Z^2\alpha^2}{2}\frac{8\alpha}{3\pi}\beta^2\times$$

$$\times\int_0^1\frac{du\,u}{(u+2\beta)^4}(1+u^2/2)\sqrt{1-u^2}. \tag{2.26}$$

Результаты, полученные нами:

$$\Delta E^{(1)}(2p-2s)=205.009meV. \tag{2.27}$$

Результаты, полученные другими авторами [6, 14]:

$$\Delta E^{(1)}(2p-2s)=205.0074meV. \tag{2.28}$$

**Двухпетлевая поправка.** Вклад электронной поляризации с двумя петлями в Лэмбовский сдвиг может быть вычислено точно как вклад с одной петлей. Соответствующий потенциал к электронной поляризации с двумя петлями может быть представлен как (детали см. [6]):

$$\delta V_{VP}^{(2)}=\frac{g_2}{r}\int_1^\infty d\zeta e^{-2m_er\zeta}w_2(\zeta), \tag{2.29}$$

где мы использовали обозначения

$$g_2=Z\alpha\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2;\ w_2(\zeta)=\left(\frac{13}{54\zeta^2}+\frac{7}{108\zeta^4}+\frac{2}{9\zeta^6}\right)\sqrt{\zeta^2-1}+$$

$$+\left(-\frac{44}{9\zeta}+\frac{2}{3\zeta^3}+\frac{5}{4\zeta^5}+\frac{2}{9\zeta^7}\right)\ln\left[\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right]+$$

$$+\left(\frac{4}{3\zeta^2}+\frac{2}{3\zeta^4}\right)\sqrt{\zeta^2-1}\ln\left[8\zeta(\zeta^2-1)\right]+\left(\frac{2}{3\zeta^5}-\frac{8}{3\zeta}\right)\times$$

$$\times\int_\zeta^\infty dx\left(\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}\ln\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ln\left[8x(x^2-1)\right]\right)$$

(2.30)

После некоторых упрощений, которые представлены в предыдущих пунктах для расщепления энергетического уровня 2p-2s состояния, имеем:

$$\Delta E^{(2)}(2p-2s)=\frac{M_2\alpha^2Z^2}{2}\left(\frac{2\alpha\beta}{\pi}\right)^2\int_0^1\frac{du\ u}{(u+2\beta)^4}\times$$

$$\times\left\{\left(\frac{13}{54}+\frac{7}{108}u^2+\frac{2}{9}u^4\right)\sqrt{1-u^2}+\right.$$

$$+\left(-\frac{44}{9}+\frac{2u^2}{3}+\frac{5u^4}{4}+\frac{2u^6}{9}\right)\ln\left[\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}\right]+$$

$$\left.+\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}u^2\right)\sqrt{1-u^2}\ln\left[\frac{8(1-u^2)}{u^3}\right]-\left(-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}u^4\right)F(u)\right\} \quad (2.31)$$

где

$$F(u)=\int_0^u\frac{dt}{t}\left\{\frac{3-t^2}{1-t^2}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\left[\frac{8(1-t^2)}{t^3}\right]\right\},$$

$$F(0)=0.$$

Наши численные результаты оказались:

$$\Delta E^{(2)}(2p-2s)=1.509meV. \quad (2.32)$$

Результаты, полученные другими авторами [6, 14]:

$$\Delta E^{(2)}(2p-2s)=1.5079meV. \quad (2.33)$$

В заключении подытожим некоторые основные результаты.

Предложен рецепт определения энергетического спектра связанного состояния с учетом релятивистских эффектов. Определен релятивистский гамильтониан, который зависит от конституентных масс частиц в связанном состоянии. В нашем подходе потенциал взаимодействия определяется вкладом всевозможных типов диаграмм Фейнмана. Поэтому потенциал взаимодействия содержит непотенциальный вклад, который связан с диаграммой собственной энергии.

В рамках нашего подхода аналитически определены конституентные массы связанных состояний. Мы показали, что конституентная масса частиц отличается от масс свободного состояния. Также аналитическим путем определен энергетический спектр для любых орбитальных и радиальных возбуждений. С учетом одно- и двухпетлевого приближений определены поправки к энергетическому спектру с орбитальным и радиальным возбуждением для мюонного водорода. Наш подход дает возможность определить радиационные поправки для любых орбитальных и радиальных возбужденных состояний. В нашем подходе условие релятивистской инвариантности строго выполняется. При определении мы не проводили разложение $\sqrt{\vec{p}^2+m^2}=m+\frac{\vec{p}^2}{2m}-\frac{\vec{p}^4}{8m^3}+\ldots$. Поэтому полученный численный результат для одно- и двухпетлевых получается больше, чем у других авторов.

**Приложение А.** Важным элементом вычислений в ОП [12, 13] является представление канонических переменных в нормальной форме. Поэтому приведем некоторые детали этого представления для различных потенциалов. Рассмотрим выражение

$$e^{ik\vec{a}}e^{ip\vec{a}^+}=e^{ip\vec{a}^+}e^{ik\vec{a}}\cdot e^{-(kp)}, \quad (A.1)$$

и после некоторых упрощений мы получаем

$$e^{-2m_e q^2\zeta}=\int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d e^{-\eta^2-2i\sqrt{2m_e\zeta}(q\eta)}=$$

$$=\int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d e^{-\eta^2(1+x)}e^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)}, \quad (A.2)$$

здесь :*: является символом нормального порядка, а также использовали обозначение

$$x=2m_e\zeta/\omega$$

и $q_j,\eta_j$ – векторы в вспомогательном пространстве $R^d$. Принимая во внимание это представление, мы получили выражение для энергии основного состояния и для гамильтониана взаимодействия.

Далее некоторые детали вычисления матричного элемента $\langle n_r|H_I|n_r\rangle$:

$$\langle n_r|H_I|n_r\rangle=-4M_2g_1\int_1^\infty d\zeta w_1(\zeta)\times$$

$$\times\left\langle n_r\left|\int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d e^{-\eta^2(1+x)}e^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)}\right|n_r\right\rangle. \quad (A.3)$$

Для вычисления этого матричного элемента, мы часто рассматриваем следующую величину:

$$T_n(x) = \int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d e^{-\eta^2(1+x)} \langle n| : e^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)} \vdots n\rangle . \quad (A.4)$$

Возьмем во внимание следующее соотношение

$$(a^+a^+)^n = (-1)^n \frac{d^n}{d\beta^n} \exp\{-\beta(a^+a^+)\}\Big|_{\beta=0} \times \quad (A.5)$$

$$\times (-1)^n \frac{d^n}{d\beta^n} \int\left(\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \exp\{-\xi^2 - 2i\sqrt{\beta}(a^+\xi)\}\Big|_{\beta=0},$$

и используя следующее представление

$$e_2^{i(\bar{k}a)} = P_\upsilon e^{i\upsilon(\bar{k}a)},$$

где $P_\upsilon$ – оператор, определенный согласно следующим законам:

$P_\upsilon const = 0$, $P_\upsilon \upsilon^n = 0$, $n \le 2$; $P_\upsilon \upsilon^n = 1$ $n \rangle 2$;

после некоторых изменении в (A.4) мы имеем:

$$T_n(x) = P_\upsilon C_n^2 \frac{d^{2n}}{d\alpha^n d\beta^n} \int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \times$$

$$\times \int\int\left(\frac{d\xi_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d \left(\frac{d\xi_2}{\sqrt{\pi}}\right)^d e^{-\eta^2(1+x)-\xi_1^2-\xi_2^2} \times \quad (A.6)$$

$$\times \langle 0| e^{-2i\sqrt{\alpha}(a\xi_1)} e^{-i\upsilon\sqrt{2x}(a^+\eta)} e^{-i\upsilon\sqrt{2x}(a\eta)} e^{-2i\sqrt{\beta}(a^+\xi_2)} 0\rangle\Big|_{\beta,\alpha=0},$$

с $T_0(x) = 0$. В конце мы получаем

$$T_n(x) = \sum_{k=2}^{2n}\sum_{s=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{(1+x)^{k+d/2}} \cdot \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(n+d/2)} \times$$

$$\times \frac{2^{2s-k}}{\Gamma(n-s+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+n-s+d/2)}{\Gamma^2(k-s+1)(2s-k+1)} \quad (A.7)$$

и

$$T_1 = \frac{x^2}{(1+x)^{2+d/2}}(1+d/2). \quad (A.8)$$

ЛИТЕРАТУРА


1. *Бьёркен Дж.Д., Дрелл С.Д.* Релятивистская квантовая теория. Т. 1, 2. Н.: ИО НФМИ, 2000.
2. *Schwinger J.* // Proc. Acad. Sci. USA, 37, p. 452(1951).
3. *Salpeter E., Bethe H.* // Phys. Rev.,84,p.1232(1951).
4. *Caswell W.E., Lepage G.P.* // Phys. Let. B 167, p.437(1986).
*Kinoshita T., Nio M.* // Phys. Rev. D 53, p.4909(1996).
6. *Eides M.I., et al.* // Phys. Repor., 342, p.61-261(2001).
7. *Dineykhan M., Efimov G.V., Namsrai Kh.* // Fortschr. Phys. 39, 259(1991).
8. *Feynman R.P., Hibbs A.P.* Quantum Mechanics and Path Integrals (Me Graw-Hill, New York, 1963).
9. *Berestetskii V.B., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.* Quantum Electrodynamics, 2nd Edition, Pergamon Press, Oxford, 1982.
10. *Glauber R. , Rarita W., Schwed P.* // Phys. Rev., 120, p.609(1960).
11. *Dineykhan M.* et al. Oscillator Representation in quantum physics, (Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1995), vol. 26.
12. *Fradkin E.S.* Nucl. Phys. 49, 624 (1963); *Hayashi K., Hirayama M., Muta T.,* et al. : Fortsh. Phys. 15, 625 (1967); *Salam A.* Nonpolynomial Lagrangians. Renomalization and Gravity. New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1971.
13. *Dineykhan M., Efimov G.V.* Rep. Math. Phys. 36, 287 (1995); Yad. Fiz. 59, 862 (1996); *Dineykhan M.* Z. Phys. D41, 77 (1997); *Dineykhan M., Nazmitdinov R.G.* Yad. Fiz. 62, 143 (1999).
14. *Pachuki K.* // Phys., Rev., A53, p.2092(1996); Phys. Rev., A60, p.3593(1999).
15. *Fock V.A.* Principles of quantum Mechanics. Moscow: Nauka, 1976.



**Резюме**

Релятивистік эффектілерді ескере отырып байланысқан күйлердің энергетикалық спектрін анықтау әдісі берілген. Байланысқан күйдегі бөлшектердің конституенттік массасына тәуелді релятивистік гамильтониан анықталды. Біздің әдістеме бойынша байланысқан күйлердің масс және конституенттік массасы аналитикалық жолмен анықталды. Бөлшектердің конституенттік массасы еркін күйдің массасынан өзгеше екенін көрсеттік. Кез келген орбиталды және радиалды қозу үшін энергетикалық спектр анықталды. Бір және екі ілмекті жуықтауды ескере отырып орбиталды және радиалды қозуы бар энергетикалық спектрдің түзетулері анықталды.



**Summary**

The method for energy spectrum definition taking into account the relativistic corrections is offered. The relativistic Hamiltonian which depends on constituent masses of each particles in the bound state is defined. Within the limits of our approach the masses and the constituent masses are analytically defined. We have shown that constituent masses of particles differ from the masses of particles in free state. Also the energy spectrum for any orbital and radial excitation is defined. The energy spectrum for any orbital and radial excitation with one and two polarization loops is defined.



*Казахский национальный*
*университет им. аль-Фараби,*
*г. Алматы*


*Поступила 12.03.09г.*