УДК 519.216

Б. Д. ДЮЗБЕНБЕТОВ, М. С. СЛЯМОВА, Г. А. БАТЫРБАЕВА

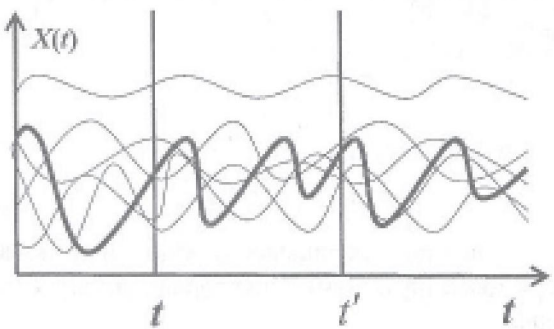
ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Нестационарным случайным процессом называют случайный процесс, статистические характеристики которого не являются инвариантными по отношению к выбору начала отсчета времени и зависят от времени.

Рассмотрим сечение случайной функции $X(t)$ (под сечением случайной функции понимают значения случайной функции в произвольный момент времени) при фиксированном времени (рис.). В этом сечении имеем систему случайных величин $X_j(t)$, где $X_j(t)$ – j-ая реализация случайного процесса, поэтому математическое ожидание случайных величин $X_j(t)$

$$m_x(t) = M[X(t)] \qquad (1)$$

и представляет собой некоторую функцию времени. Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции. График изменения $m_x(t)$ показан на рис. жирной линией.



Аналогично определяется дисперсия случайной функции

$$D_x(t) = M\left[\overset{0}{X}(t)^2\right], \quad \left(\overset{0}{X}(t) = X(t) - m_x(t)\right). \quad (2)$$

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $D_x(t)$, значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайного процесса.

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Для более полной характеристики случайной функции вводится еще одна неслучайная функция, устанавливающая степень зависимости между двумя сечениями случайной функции, например, между сечениями, соответствующими моментам времени t и t' (рис.). Так как эти системы случайных величин (в каждом сечении) вызваны реализациями одного и того же случайного процесса, то, по-видимому, они должны быть взаимосвязаны. Для численной оценки этой связи можно воспользоваться числовой характеристикой системы двух случайных величин – корреляционным моментом, т.е.

$$K_{xx}(t,t') = K_x(t,t') = M\left[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}(t')\right]. \quad (3)$$

Введенную функцию $K_{xx}(t,t')$ называют корреляционной (или автокорреляционной) функцией.

Корреляционной (или автокорреляционной) функцией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию двух аргументов $K_x(t,t')$, которая при каждой паре значении t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции.

Из определения корреляционной функции следует, что

$$K_{xx}(t,t') = K_{xx}(t',t). \qquad (4)$$

Так как $D_x(t) = M\left[\overset{0}{X}(t)^2\right]$, то из (4) при $t = t'$

$$K_{xx}(t,t') = D_x(t). \qquad (5)$$

Вместо корреляционной функции $K_{xx}(t,t')$ часто используют нормированную корреляционную функцию

$$r_{xx}(t,t') = \frac{K_{xx}(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}. \qquad (6)$$

Для вероятностных характеристик линейно связанных случайных функций $Y(t) = c(t)X(t)$ справедливы следующие соотношения [1]:

$$m_y(t) = c(t)m_x(t); \qquad (7)$$

$$D_y(t) = c^2(t)D_x(t); \qquad (8)$$

$$K_{yy}(t,t') = c(t)c(t')K_{xx}(t,t'), \qquad (9)$$

где $c(t)$ – неслучайная функция.

Рассмотрим систему двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$. Для определения их вероятностных характеристик можно рассматривать значения функций в разные моменты времени как случайные величины. Для известных многомерных законов распределения можно получить исчерпывающую информацию о системе случайных функций, однако использование многомерных законов приводит к весьма громоздким математическим методам решения, тем более, что такая исчерпывающая характеристика системы случайных функций практически не нужна. Для прикладных задач в большинстве случаев достаточно определения значений первых двух моментов случайных функций (так же как и для системы случайных величин), т.е. можно ограничиться корреляционной теорией случайных функций. Первый и второй моменты каждой случайной функции – это соответственно математическое ожидание и корреляционная функция. Рассмотрим второй смешанный момент от центрированных случайных функций $\overset{0}{X}$ и $\overset{0}{Y}$ для различных моментов времени:

$$M\left[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{Y}(t')\right] = K_{xy}(t,t'), \qquad (10)$$

где $K_{xy}(t,t')$ – взаимная корреляционная функция.

Взаимная корреляционная функция не удовлетворяет условию симметрии относительно своих аргументов, т.е.

$$K_{xy}(t,t') \neq K_{xy}(t',t),$$

но при одновременной перестановке моментов времени и индексов имеем

$$K_{xy}(t,t') = K_{yx}(t',t).$$

Если взаимная корреляционная функция K_{xy} не тождественна нулю, то случайные функции X и Y называются коррелированными; если же K_{xy} тождественна нулю, то такие случайные функции называют некоррелированными.

Для комплексных случайных функций взаимная корреляционная функция

$$K_{xy}(t,t') = M\left[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{Y}{}^*(t')\right], \qquad (11)$$

где $\overset{0}{Y}{}^*$ – центрированная сопряженная случайная функция. Корреляционная функция (11) в частном случае при $t = t'$ и $X = Y$ есть дисперсия случайной комплексной функции X, которая должна быть положительной, что имеет место в том случае, если берется произведение комплексной функции на сопряженную функцию:

$$D_x(t) = M\left[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}{}^*(t)\right] =$$

$$= M\left[\left(\overset{0}{X}_1(t) + i\overset{0}{X}_2(t)\right)\left(\overset{0}{X}_1(t) - i\overset{0}{X}_2(t)\right)\right] =$$

$$= M\left[\overset{0}{X}{}_1^2 + \overset{0}{X}{}_2^2\right].$$

Можно показать, что

$$K_{xy}(t,t') = K^*_{yx}(t,t'). \qquad (12)$$

В прикладных задачах удобно использовать нормированную взаимную корреляционную функцию

$$r_{xx}(t,t') = \frac{K_{xy}(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_y(t')}. \qquad (13)$$

Так же как и для системы двух случайных величин, можно ввести корреляционную матрицу

$$K = \begin{Vmatrix} K_x(t,t') & K_{xy}(t,t') \\ K_{yx}(t,t') & K_y(t,t') \end{Vmatrix}, \qquad (14)$$

полезную при преобразованиях.

Для системы n случайных функций имеем

$$K = \begin{Vmatrix} K_{x_1x_1} & K_{x_1x_2} & \cdots & K_{x_1x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{x_nx_1} & K_{x_nx_2} & \cdots & K_{x_nx_n} \end{Vmatrix}. \qquad (15)$$

Рассматривая случайные функции $X_j(t)$ как компоненты n-го вектора, матрицу K (15) можно представить в более компактной форме записи, используя диадное (тензорное) произведение двух векторов:

$$K = M\left[\overset{0}{X}(t) \otimes \overset{0}{X}(t')\right].$$

Рассмотрим линейные преобразования случайных функций, когда с помощью линейных операторов L устанавливается связь между «входом» и «выходом»:

$$Y(t) = L[X(t)]. \qquad (16)$$

Имеется в виду статистическая связь между входом и выходом, когда по известным вероятностным характеристикам случайной функции $X(t)$ надо определить вероятностные характеристики $Y(t)$.

Рассмотрим наиболее часто употребляемые при исследовании случайных колебаний линейные преобразования:

1. Вход и выход связаны соотношением

$$Y(t) = \varphi(t)X(t), \qquad (17)$$

где $\varphi(t)$ – неслучайная функция. Для этого случая имеем

$$m_y(t) = \varphi(t)m_x; \qquad (18)$$

$$K_y(t,t') = M\left[\overset{0}{Y}(t)\overset{0}{Y}(t')\right] = \varphi(t)\varphi(t')K_x(t,t').$$

Дисперсия выхода

$$D_y(t) = \varphi^2(t)D_x(t). \qquad (19)$$

2. В случае, если вход $\overline{X}$ и выход $\overline{Y}$ – случайные, n-мерные векторы связаны линейным соотношением вида

$$\overline{Y}(t) = B(t)\overline{X}(t), \qquad (20)$$

где $B(t)$ – матрица $(n\times n)$, элементы которой $k_{ij}(t)$ являются неслучайными функциями, то математические ожидания компонент вектора $\overline{Y}$

$$m_{y_j}(t) = M\left[\sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}m_{xi}(t), \qquad (21)$$

$$(j = 1,\ 2,\ldots,n).$$

а корреляционная матрица

$$K(t,t') = M\left[\overset{0}{Y}(t) \otimes \overset{0}{Y}(t')\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} K_{y_1y_1} & K_{y_1y_2} & \cdots & K_{y_1y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{y_ny_1} & K_{y_ny_2} & \cdots & K_{y_ny_n} \end{bmatrix};$$

$$K_{y_iy_j} = M\left[\overset{0}{Y}_j(t)\overset{0}{Y}_i(t')\right] =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\rho}(t)b_{j\nu}(t')K_{x_\rho x_\nu}(t,t').$$

Дисперсия компонент вектора $\overline{Y}$

$$D_{y_i}(t) = \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\rho}(t)b_{j\nu}(t)K_{x_\rho x_\nu}(t,t). \qquad (22)$$

3. Интеграл от случайной функции $X(t)$

$$Y(t) = \int_0^t X(\varepsilon)d\varepsilon. \qquad (23)$$

Считая, что операции осреднения и интегрирования перестановочны, находим математическое ожидание

$$m_y(t) = M\left[\int_0^t X d\varepsilon\right] = \int_0^t M[X]d\varepsilon = \int_0^t m_x(\varepsilon)d\varepsilon. \qquad (24)$$

Перестановка операции математического ожидания с другими линейными математическими операциями используется и в последующих преобразованиях.

Корреляционная функция

$$K_y(t,t') = M\left[\left(Y(t)-m_y(t)\right)\left(Y(t')-m_y(t')\right)\right] =$$
$$= M\left[\int_0^t \left[X(\varepsilon)-m_x(\varepsilon)\right]d\varepsilon \int_0^{t'}\left[X(\varepsilon_1)-m_x(\varepsilon_1)\right]d\varepsilon_1\right]. \quad (25)$$

Произведение двух интегралов под знаком математического ожидания в формуле (25) равно двойному интегралу

$$\int_0^t\int_0^{t'}\left(X(\varepsilon)-m_x(\varepsilon)\right)\left(X(\varepsilon_1)-m_x(\varepsilon_1)\right)d\varepsilon\, d\varepsilon_1$$

поэтому

$$K_y(t,t') = M\left[\int_0^t\int_0^{t'}\left(X(\varepsilon)-m_x(\varepsilon)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(X(\varepsilon_1)-m_x(\varepsilon_1)\right)d\varepsilon\ \ d\varepsilon_1\right] =$$
$$= \int_0^t\int_0^{t'} M\left[\left(X(\varepsilon)-m_x(\varepsilon)\right)\left(X(\varepsilon_1)-m_x(\varepsilon_1)\right)\right]d\varepsilon\ \ d\varepsilon_1 =$$
$$= \int_0^t\int_0^{t'} K_x(\varepsilon,\varepsilon_1)\,d\varepsilon\ \ d\varepsilon_1. \quad (26)$$

4. Вероятностные характеристики случайной функции

$$Y(t) = a(t)c + \int_0^t k(t,\tau)X(\tau)d\tau, \quad (27)$$

где $a(t)$, $k(t,\tau)$ – неслучайные функции; c – случайная величина с известными m_c и D_c; $X(\tau)$ – случайная функция с известными m_x и K_x.

Математическое ожидание $Y(t)$

$$m_y(t) = M\left[a(t)c + \int_0^t k(t,\tau)Xd\tau\right] =$$
$$= a(t)M[c] + \int_0^t k(t,\tau)\overset{0}{M}[X]d\tau = \quad (28)$$
$$= a(t)m_0 + \int_0^t k(t,\tau)m_x d\tau.$$

Корреляционная функция, если c и X независимы

$$K_y(t,t') = M\left[\left(a(t)\overset{0}{c} + \int_0^t k(t,\tau)\overset{0}{X}_1(\tau)d\tau\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(a(t')\overset{0}{c} + \int_0^{t'} k(t',\tau_1)\overset{0}{X}(\tau_1)d\tau_1\right)\right] = \quad (29)$$
$$= a(t)a(t')M\left[\overset{0}{c}{}^2\right] + \int_0^t\int_0^{t'} k(t,\tau)k(t',\tau')K_x(\tau,\tau')d\tau\ \ d\tau'.$$

5. Рассмотрим производную от случайной функции

$$Y(t) = \frac{d}{dt}X(t). \quad (30)$$

Математическое ожидание $Y(t)$

$$M\left[Y(t)\right] = m_y(t) =$$
$$= M\left[\frac{dX(t)}{dt}\right] = \frac{d}{dt}M\left[X(t)\right] = \frac{dm_x(t)}{dt}. \quad (31)$$

Получим соотношение, связывающее корреляционные функции $K_y(t,t')$ и $K_x(t,t')$:

$$K_y(t,t') = M\left[\left(Y(t)-m_y(t)\right)\left(Y(t')-m_y(t')\right)\right] =$$
$$= M\left[\frac{d\overset{0}{X}(t)\,d\overset{0}{X}(t')}{dt\ \ dt'}\right]. \quad (32)$$

Произведение производных под знаком математического ожидания можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\overset{0}{X}(t)\frac{d}{dt'}\overset{0}{X}(t') = \frac{\partial^2\left[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}(t')\right]}{\partial t\partial t'}. \quad (33)$$

Из соотношения (32) с учетом (33) получаем

$$K_y(t,t') = M\left[\frac{\partial^2\left[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}(t')\right]}{\partial t\partial t'}\right] =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}M\left[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}(t')\right] = \frac{\partial^2 K_x(t,t')}{\partial t\partial t'}. \quad (34)$$

Если случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ связаны соотношением $Y(t) = \dfrac{d^2X(t)}{dt^2}$, то корреляционная функция

$$K_y(t,t') = \frac{\partial^4 K_x(t,t')}{\partial t^2\partial t'^2}. \quad (35)$$

Корреляционная функция производной порядка n случайной функции $X(t)$

$$Y = \frac{d^nX}{dt^n} \quad (36)$$

будет

$$K_y = \frac{\partial^{2n} X}{\partial t^n \partial t'^n}. \qquad (37)$$

Получим взаимную корреляционную функцию случайной функции X и ее производной

$$K_{xx} = M\left[\overset{\circ}{X}(t)\frac{d\overset{\circ}{X}(t')}{dt}\right] =$$

$$= M\frac{\partial \overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')}{\partial t'} = \frac{\partial K_x}{\partial t'}. \qquad (38)$$

Аналогично получаем выражение для взаимных корреляционных функций производных случайной функции $X(t)$

$$K_{x_p x_q} = \frac{\partial^{p+q} K_x(t,t')}{\partial t^p \partial t'^q}. \qquad (39)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1991. 384 с.

2. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.

3. *Светанцкий В.А.* Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1976. 216 с.

Резюме

Стационар емес кездейсоқ шамалардың сызықты түрлену мәселесі қарастырылған. Уақытқа тәуелді кездейсоқ функция спектрінің кимасы үшін оның сызықтық сипаттамаларын анықтау келтірілген, сонымен қатар кездейсоқ екі функцияның өзара корреляциялық функциясын анықтау тәсілі берілген.

Summary

A nonstationary random process is called as a random one, which statistical characteristics aren't invariant with regard to selection of beginning of time count and depend on the time.

КазГосЖенПУ, г. Алматы *Поступила 29.03.2011г.*