УДК 517.968.72

Д. С. ДЖУМАБАЕВ, Э. А. БАКИРОВА

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается метод исследования и решения линейной двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений, основанный на разбиении интервала и введении дополнительных параметров. В терминах матриц дифференциальной части, интегрального члена и граничных условий установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

На отрезке $[0, T]$ рассматривается двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad x \in R^n, \quad \|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где $A(t), f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$.

Известные методы исследования краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений [1, 2] позволяют получить лишь достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2). В [3] задача (1), (2) аппроксимируется краевой задачей для нагруженных дифференциальных уравнений и в терминах аппроксимирующих краевых задач установлен критерий ее корректной разрешимости. В [4] установлено, что однозначная разрешимость задачи (1),(2) эквивалентна обратимости матрицы $Q_{**}(h)$ при некотором $h>0: Nh=T$, где $Q_{**}(h)$ составляется по фундаментальной матрице дифференциальной части (1) и матрицам $K(t, s)$, B, C.

В настоящей работе необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости получены в терминах исходных данных задачи (1), (2) без использования фундаментальной матрицы.

По шагу $h>0$: $Nh=T$ производится разбиение $[0,T)=\bigcup_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh)$ и сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[(r-1)h,rh)$ обозначается через $x_r(t)$.

Введя параметры $\lambda_r=x_r[(r-1)h]$ и на каждом r-ом интервале произведя замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$ получаем краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)[u_r+\lambda_r]+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(t,s)[u_j(s)+\lambda_j]ds+f(t),\quad t\in[(r-1)h,rh), \tag{3}$$

$$u_r[(r-1)h]=0,\quad r=\overline{1,N}, \tag{4}$$

$$B\lambda_1+C\lambda_N+C\lim_{t\to T-0}u_N(t)=d, \tag{5}$$

$$\lambda_s+\lim_{t\to sh-0}u_s(t)=\lambda_{s+1},\quad s=\overline{1,N-1}. \tag{6}$$

Специальная задача Коши (3), (4) при фиксированных значениях $\lambda\in R^{nN}$ эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau)u_r(\tau)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau)\lambda_r d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(\tau,s)\lambda_j dsd\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(\tau)d\tau,\ t\in[(r-1)h,rh),\ r=\overline{1,N}. \tag{7}$$

В первом слагаемом вместо $u_r(\tau)$, $r=\overline{1,N}$, подставив соответствующую правую часть (7), повторив этот процесс $\nu\in\mathbb{N}$ раз, получим представление $u_r(t)$ вида

$$u_r(t)=D_{\nu r}(t)\lambda_r+\sum_{j=1}^{N}H_{\nu rj}(t)\lambda_j+G_{\nu r}(u,t)+P_{\nu r}(Ku,t)+F_{\nu r}(t),\quad t\in[(r-1)h,rh), \tag{8}$$

где

$$D_{\nu r}(t)=\sum_{i=0}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_i}A(\tau_{i+1})d\tau_{i+1}\ldots d\tau_1,$$

$$H_{\nu rj}(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}d\tau_1\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(\tau_1,s)ds+\sum_{i=1}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{i-1}}A(\tau_i)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_i}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(\tau_{i+1},s)dsd\tau_{i+1}\ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(\tau_1)d\tau_1+\sum_{i=1}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{i-1}}A(\tau_i)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_i}f(\tau_{i+1})d\tau_{i+1}d\tau_i\ldots d\tau_1,$$

$$P_{\nu r}(Ku,t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(\tau_1,s)u_j(s)dsd\tau_1+$$

$$+\sum_{i=1}^{\nu-1}\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{i-1}}A(\tau_i)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_i}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(\tau_{i+1},s)u_j(s)dsd\tau_{i+1}\ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(u,t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_i}A(\tau_{i+1})u_r(\tau_{i+1})d\tau_{i+1}\ldots d\tau_1,\quad \tau_0=t,\quad r=\overline{1,N}$$

В (8) предполагая $t=\tau$, умножая обе части на $K(t,\tau)$, интегрируя по τ на $t\in[(r-1)h,rh)$ и складывая левые и правые части по r, имеем

$$\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}K(t,\tau)u_r(\tau)d\tau=\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}K(t,\tau)D_{\nu r}(\tau)d\tau\lambda_r+\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}K(t,\tau)\sum_{j=1}^{N}H_{\nu rj}(\tau)d\tau\lambda_j+$$

$$+\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}K(t,\tau)G_{\nu r}(u,\tau)d\tau+\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}K(t,\tau)F_{\nu r}(\tau)d\tau+\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}K(t,\tau)P_{\nu r}(u,\tau)d\tau. \qquad (9)$$

Введя следующие обозначения:

$$\Phi(h,t)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(t,s)u_j(s)ds,\quad M_r(\nu,t)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}K(t,\tau)D_{\nu r}(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(t,\tau)H_{\nu jr}(\tau)d\tau,$$

$$F(\nu,t)=\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}K(t,\tau)F_{\nu r}(\tau)d\tau,\quad G(\nu,t)=\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}K(t,\tau)G_{\nu r}(u,\tau)d\tau$$

уравнение (9) запишем в виде

$$\Phi(h,t)=\sum_{r=1}^{N}M_r(\nu,t)\lambda_r+F(\nu,t)+G(\nu,u,t)+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(t,\tau)\left\{\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}\Phi(h,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}A(\tau_1)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_1}\Phi(h,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots+\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\Phi(h,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right\}d\tau. \qquad (10)$$

Равенствами

$$M_r^{(0)}(\nu,t)=M_r(\nu,t),\ \ M_r^{(k)}(\nu,t)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(t,\tau)\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{(r-1)h}^{\tau}M_r^{(k-1)}(\nu,\tau_1)d\tau_1+\ldots+\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_{\nu-1}}M_r^{(k-1)}(\nu,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right\}d\tau,$$

$$F^{(0)}(\nu,t)=F(\nu,t),\ \ F^{(k)}(\nu,t)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(t,\tau)\left\{\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}F^{(k-1)}(\nu,\tau_1)d\tau_1+\ldots+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_{\nu-1}}F^{(k-1)}(\nu,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right\}d\tau,$$

$$G^{(0)}(u,\nu,t)=G(u,\nu,t),\ \ G^{(k)}(u,\nu,t)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(t,\tau)\left\{\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}G^{(k-1)}(u,\nu,\tau_1)d\tau_1+\ldots+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_{\nu-1}}G^{(k-1)}(\nu,u,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right\}d\tau,\ k=1,2,\ldots,$$

определяем последовательности матриц и векторов, зависящих от $t\in[0,T]$. Пусть $\sigma_\nu(h)=\beta Th\left(1+\alpha h+(\alpha h)^2/2!+\ldots+(\alpha h)^{\nu-1}/(\nu-1)!\right)$, $\sigma(h)=T\beta he^{\alpha h}$ и $h_0>0$ удовлетворяет неравенству $\sigma(h)<1$. Тогда в силу неравенств

$$\left\|\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(t,\tau)\left\{\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}\Phi(h,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}A(\tau_1)\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_1}\Phi(h,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(j-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\Phi(h,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right\}d\tau\right\|\le$$

$$\le\beta Th\left(1+\alpha h+(\alpha h)^2/2!+\ldots+(\alpha h)^{\nu-1}/(\nu-1)!\right)\max_{t\in[0,T]}\|\Phi(h,t)\|<\beta The^{\alpha h}\max_{t\in[0,T]}\|\Phi(h,t)\|,$$

где $\beta=\max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}\|K(t,s)\|$, $\alpha=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(t)\|$, $\sigma_\nu(h)<\sigma(h)$ уравнение (10) при любых $h\in(0,h_0]$, $\nu\in\mathbb{N}$ имеет единственное решение, и оно представимо в виде

$$\Phi(h,t)=\sum_{r=1}^{N}\widehat{M}_r(\nu,t)\lambda_r+\widehat{F}_h(\nu,t)+\widehat{G}_h(\nu,u,t),\ \ t\in[0,T], \tag{11}$$

где

$$\widehat{M}_r(\nu,t)=\sum_{k=0}^{\infty}M_r^{(k)}(\nu,t),\ \widehat{F}_h(\nu,t)=\sum_{k=0}^{\infty}F^{(k)}(\nu,t),\ \ \widehat{G}_h(\nu,u,t)=\sum_{k=0}^{\infty}G^{(k)}(\nu,u,t). \tag{12}$$

Подставив правую часть (11) вместо $\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}K(t,s)u_j(s)ds$ в слагаемом $P_{\nu r}(Ku,t)$ из (8), получим

$$u_r(t)=D_{\nu r}(t)\lambda_r+\sum_{j=1}^{N}H_{\nu rj}(t)\lambda_j+G_{\nu r}(u,t)+F_{\nu r}(t)+\sum_{j=1}^{N}\left\{\int\limits_{(r-1)h}^{t}\widehat{M}_r(\nu,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}\widehat{M}_r(\nu,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+\ldots+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widehat{M}_r(\nu,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right\}\lambda_j+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\widehat{F}_h(\nu,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}\widehat{F}_h(\nu,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+\ldots+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\times$$

$$\times\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widehat{F}_h(\nu,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\widehat{G}_h(\nu,u,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}\widehat{G}_h(\nu,u,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+\ldots+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widehat{G}_h(\nu,u,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,\ \ t\in[(r-1)h,rh),\ \ r=\overline{1,N}. \tag{13}$$

Из (13), определив $\lim\limits_{t\to T-0}u_N(t)$, $\lim\limits_{t\to sh-0}u_s(t)$, $s=\overline{1,N-1}$, подставляя соответствующие им выражения в условия (5), (6) и умножая обе части (5) на $h>0$, получим систему линейных уравнений относительно параметров λ_r, $r=\overline{1,N}$

$$hB\lambda_1+hC\lambda_N+hCD_{\nu N}(Nh)\lambda_N+hC\sum_{j=1}^{N}H_{\nu Nj}(Nh)\lambda_j+hC\sum_{j=1}^{N}\left\{\int\limits_{(N-1)h}^{Nh}\widehat{M}(\nu,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(N-1)h}^{Nh}A(\tau_1)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_1}\widehat{M}_r(\nu,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+\ldots+\int\limits_{(N-1)h}^{Nh}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widehat{M}_r(\nu,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right\}\lambda_j=$$

$$= hd - hCF_{\nu N}(Nh) - hC\left[\int\limits_{(N-1)h}^{Nh}\widehat{F}_h(\nu,\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh}A(\tau_1)\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_1}\widehat{F}_h(\nu,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh}A(\tau_1)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widehat{F}_h(\nu,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right] - hCG_{\nu N}(u,T) - hC\left[\int\limits_{(N-1)h}^{Nh}\widehat{G}_h(\nu,u,\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh}A(\tau_1)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_1}\widehat{G}_h(\nu,u,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widehat{G}_h(\nu,u,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right], \quad (14)$$

$$\lambda_s + D_{\nu s}(sh)\lambda_s + \sum_{j=1}^{N}H_{\nu sj}(sh)\lambda_j + \sum_{j=1}^{N}\left\{\int\limits_{(s-1)h}^{sh}\widehat{M}_r(\nu,\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(s-1)h}^{sh}A(\tau_1)\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_1}\widehat{M}_r(\nu,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 +\right.$$

$$\left.+\ldots+\int\limits_{(s-1)h}^{sh}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widehat{M}_r(\nu,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right\}\lambda_j - \lambda_{s+1} = -F_{\nu s}(sh) -$$

$$-\left[\int\limits_{(s-1)h}^{sh}\widehat{F}_h(\nu,\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(s-1)h}^{sh}A(\tau_1)\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_1}\widehat{F}_h(\nu,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{(s-1)h}^{sh}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widehat{F}_h(\nu,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right] - G_{\nu s}(u,sh) - \left[\int\limits_{(s-1)h}^{sh}\widehat{G}_h(\nu,u,\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(s-1)h}^{sh}A(\tau_1)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_1}\widehat{G}_h(\nu,u,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \int\limits_{(s-1)h}^{sh}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widehat{G}_h(\nu,u,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right]. \quad (15)$$

Матрицу размерности $nN \times nN$, соответствующую левой части систем линейных уравнений (14), (15), обозначим через $Q_\nu^*(h)$. Тогда система линейных уравнений (14), (15) записывается в виде

$$Q_\nu^*(h)\lambda = -F_\nu^*(h) - G_\nu^*(u,h), \quad \lambda \in R^{nN}. \quad (16)$$

Таким образом, для нахождения неизвестных пар $(\lambda, u[t])$ решения задачи (3)-(6) имеем замкнутую систему уравнений (7), (16).

Теорема 1. Краевая задача (1),(2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $h \in (0, h_0]$, существует $\nu \in \mathrm{N}$, при котором матрица $Q_\nu^*(h)$ обратима и выполняются неравенства

$$\left\|[Q_\nu^*(h)]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu^*(h),$$

$$q_\nu^*(h) = \gamma_\nu^*(h)\max(1, h\|C\|)\frac{1}{1-\sigma_\nu(h)}\left\{e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \ldots - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma(h)}{1-\sigma(h)}\left(e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \ldots - \frac{(\alpha h)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right)\right\} < 1.$$

Возьмем число m и ограничившись первыми $m+1$ членами рядов (12) из (11), получим

$$\Phi^m(h,t) = \sum_{r=1}^{N} M_r^m(\nu,t)\lambda_r + F^m(\nu,t) + G^m(\nu,u,t), \quad t \in [0,T], \tag{17}$$

где

$$M_r^m(\nu,t) = \sum_{k=0}^{m} M_r^{(k)}(\nu,t),$$

$$F^m(\nu,t) = \sum_{k=0}^{m} F^{(k)}(\nu,t), \quad G^m(\nu,u,t) = \sum_{k=0}^{m} G^{(k)}(\nu,u,t).$$

Подставляя правую часть (17) вместо Ku в слагаемом $P_{\nu r}(Ku,t)$ из (8), получим представление функции $u_r(t)$ через λ_r, $u_j(t)$, $f(t)$. Из краевого условия (5) и условия склеивания (6) получим систему уравнений относительно параметров

$$Q_\nu^m(h)\lambda = -F_\nu^m(h) - G_\nu^m(u,h), \quad \lambda \in R^{nN}. \tag{18}$$

Итак, для нахождения пары $(\lambda^{*m}, u^{*m}[t])$ имеем специальную задачу Коши (3), (4) и систему уравнений (18).

Следующие утверждения устанавливают необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1),(2) в терминах матрицы $Q_\nu^m(h)$.

Теорема 2. Пусть существуют $h \in (0,h_0] : Nh = T$, ν, m, при которых матрица $Q_\nu^m(h)$ обратима и выполняются неравенства

$$\left\|[Q_\nu^m(h)]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu^m(h), \tag{19}$$

$$\xi_\nu^m(h) = \gamma_\nu^m(h)\max(1, h\|C\|)\left[1 + \sum_{k=0}^{m}(\sigma_\nu(h))^{k+1}\right] \times$$

$$\times\left\{e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \ldots - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + \frac{\sigma(h)}{1-\sigma(h)}\left(e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \ldots - \frac{(\alpha h)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right)\right\} < 1, \tag{20}$$

$$\varphi_\nu^m(h) = \gamma_\nu^m(h)\max\left(1, h\|C\|\right) \sum_{k=m+1}^{\infty} (\sigma_\nu(h))^{k+1}\left[\alpha h + \frac{(\alpha h)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + \sigma_\nu(h)\right] < 1, \qquad (21)$$

$$q_\nu^m(h) = \frac{\gamma_\nu^m(h)}{1-\varphi_\nu^m(h)}\max\left(1, h\|C\|\right)\frac{1}{1-\sigma_\nu(h)}\left\{e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \ldots - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma(h)}{1-\sigma(h)}\left(e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \ldots - \frac{(\alpha h)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right)\right\} < 1. \qquad (22)$$

Тогда задача (1),(2) имеет единственное решение.

Теорема 3. Если краевая задача (1), (2) однозначно разрешима, то для любого $h \in (0, h_0]$, существует $\nu(h)$, $m(h)$, при которых матрица $Q_\nu^m(h)$ обратима и выполняются неравенства (19), (20), (21), (22) теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Некрасов А.И.* // Труды ЦАГИ. 1934. Вып. 190. С. 1-25.
2. *Вигграненко Т.И.* // Зап. Ленинградского горн. ин-та. 1956. Т. 33. С. 177-187.
3. *Бакирова Э.А., Джумабаев Д.С.* // Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем. 2007. № 3. С. 47-51.
4. *Джумабаев Д.С.* // Математический журнал 2008. Т. 8. № 2. С. 44-48.

Резюме

Аралықты бөлу және қосымша параметрлер енгізу негізінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екінүктелі шеттік есепті зерттеу мен шешу әдісі ұсынылған. Дифференциалдық бөліктің, интегралдық мүше мен шеттік шарттар матрицалары терминінде қарастырылып отырған есептің бір мәнді шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалған.

Summary

The method of investigation and solving of linear two points boundary value problem for system of integral-differential equations is supposed, based on granulation of interval and introducing additional parameters. Necessary and sufficient conditions of unique solvability of considering problem are established in the terms of differential part, of integral member and boundary conditions.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 19.09.09г.