В. ДЖУНУШАЛИЕВ

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

НЕПЕРТУРБАТИВНОЕ КВАНТОВАНИЕ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ: СРАВНЕНИЕ

Аннотация

Производится сравнение вычислительных методов в непертурбативной квантовой теории поля и теории турбулентности. Главный результат заключается в том, что в обоих случаях имеется некоторая бесконечная система уравнений для функций Грина в 1-ом случае и для кумулянтов во 2-ом случае. Это позволяет использовать подобные математические методы для решения проблем в непертурбативной квантовой теории поля и при моделировании турбулентности. Обсуждается проблема замыкания бесконечной системы дифференциальных уравнений для функций Грина и кумулянтов.

Ключевые слова: непертурбативное квантование, турбулентность.

Кілт сөздер: пертурбативті емес кванттау, турбуленттік.

Keywords: nonperturbative quantization, turbulence.

Введение. Как известно, вплоть до настоящего времени проблемы квантования сильно взаимодействую-щих полей и возникновения турбулентности остаются нерешенными. Например, в квантовых хромодина-мике и гравитации проблемой является то, что в обоих случаях нельзя применить фейнмановскую диаграмм-ную технику. Это происходит из-за того, что диаграммная техника является пертурбативной техникой и не может применяться для квантования сильно взаимодействующих полей. Это происходит вследствие того, что диаграммная техника основывается на том, что слабовзаимодействующие поля можно описать как движение свободных частиц, взаимодействующих только в вершинах, но такая модель неприменима в случае сильновзаимодействующих полей. Проблема моделирования турбулентности заключается в том, что до сих пор не удается показать, каким образом появляется турбулентное (случайное) движение в жидкости, описываемой уравнениями Навье-Стокса.

По всей видимости, впервые методы непертурбативного квантования были использованы В. Гейзенбер-гом для квантования нелинейного спинорного поля [1]. Эта теория была им развита для построения модели электрона. Очевидно, что процедура непертурбативного квантования является намного более сложной зада-чей, чем процедура пертурбативного квантования. Это хорошо уже видно при сравнении с соответствующей классической физикой: линейные полевые уравнения (например, уравнения Максвелла) являются сущест-венно более простыми объектами для исследования, чем нелинейные полевые уравнения (уравнения Янга-Миллса и уравнения Эйнштейна). В первом случае известны общие решения соответствующих уравнений, тогда как во втором случае нам известны только некоторые специальные решения (неабелевы монополи, инстантоны, решения в общей теории относительности).

В этой статье мы хотим показать, что между указанными выше проблемами непертурбативного кванто-вания и моделирования турбулентности имеется вполне определенная математическая аналогия, заключаю-щаяся в том, что в обоих случаях имеется бесконечная система зацепленных дифференциальных уравнений. В первом случае эта система описывает все функции Грина, во втором случае система описывает все кумулянты.

1. Уравнения непертурбативной квантовой теории поля и турбулентность: сравнение. В этом пара-графе мы хотим показать, что техника неперетурбативного квантования в квантовой теории поля (основан-ная либо на операторном уравнении (решение которого представляет огромные математические проблемы), либо на бесконечной системе уравнений для функций Грина) и моделирование турбулентного потока в математическом смысле являются одной и той же проблемой: проблема решения бесконечной системы зацепленных дифференциальных уравнений. В теории турбулентности такая бесконечная система дифферен-циальных для кумулянтов всех порядков хорошо известна (детальное описание можно найти, например, в [2]).

1.1. Уравнения. В этом параграфе будут представлены исходные уравнения для функций Грина в непер-турбативной квантовой теории поля и уравнения для кумулянтов в теории турбулентности. Для удобства читателя мы представим соответствующий текст в виде двух колонок: в левой колонке содержится информация, касающаяся квантования, а в правой колонке – информация, касающаяся турбулентности.

Квантовая хромодинамика	**Турбулентность**
Классические SU(N) (N = 1,2,…,N) уравнения Янга-Миллса записываются следующим образом $$\partial_\nu F^{B\mu\nu} = 0 \qquad (1)$$ где $F^B_{\mu\nu} = \partial_\mu A^B_\nu - \partial_\nu A^B_\mu + g f^{BCD} A^C_\mu A^D_\nu$ – тензор напря-женность поля; B,C,D = 1,…,N – цветные SU(N) индексы; g – константа взаимодействия; f^{BCD} – структурные константы SU(N) калибровочной группы. Согласно основной парадигме квантования все физические переменные (в данном случае поля A^B_μ) заменяются на полевые операторы $A^B_\mu \to \hat{A}^B_\mu$. Это приводит к следующему	В теории турбулентности предпола-гается, что уравнения Навье-Стокса содер-жат всю физику турбулентного потока (в правой колонке мы следуем [2]) $$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \qquad (3)$$ где v_i – скорость жидкости; ρ – ее плот-ность; p – давление; $t_{ij} = 2\mu s_{ij}$ тензор вязких напряжений; $s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ и μ –

дифференциальному уравнению для операторов поля $$\partial_\nu \hat{F}^{B\mu\nu} = 0. \quad (2)$$ Уравнение (2) должно рассматриваться как основное уравнение при квантовании сильно взаимодействующего SU(3) калибровочного поля.	молекулярная вязкость.

Таким образом исходными уравнениями для непертурбативного квантования и моделирования турбу-лентности являются уравнения (2) и (3), которые после усреднения приводят к бесконечным системам дифференциальных уравнений либо для функций Грина (в квантовой теории поля), либо для кумулянтов (при моделировании турбулентности).

1.2. Методика проведения вычислений. В этом параграфе мы хотим показать, что вычисления в непер-турбативной квантовой теории поля и при моделировании турбулентности имеют схожие математические проблемы. Мы будем использовать $\langle \ldots \rangle$ для квантового усреднения и $\overline{(\cdots)}$ для статистического усреднения.

Квантовая хромодинамика	**Турбулентность**
Нелинейное операторное уравнение (2) для оператора не-линейного квантового поля можно применить для определения среднего значения $\left\langle \hat{A}^B_\mu \right\rangle$ полевого оператора A^B_μ где $\langle \ldots \rangle = \langle Q \vert \ldots \vert Q \rangle$ и $\vert Q \rangle$ является некоторым квантовым состоя-нием. Среднее значение $\langle A_\mu(x) \rangle$ получается при усреднении уравнения (2) по квантовому состоянию $\vert Q \rangle$ $$\left\langle Q \middle\vert \partial_\nu \hat{F}^{B\mu\nu} \middle\vert Q \right\rangle = 0. \quad (4)$$ Так как уравнение (2) содержит члены типа $\mathrm{G}^{BC}_{\mu\nu} = \langle A^B_\mu A^C_\nu \rangle$, то используя эту процедуру, мы получаем в уравнении (4) функции Грина не только первого, но и следующих порядков также. Используя уравнение (2), можно получить уравнение и для этих функций Грина, умножая его	Так как в турбулентном течении при-сутствуют случайные флуктуации всех физических величин, то для описания турбулентности используется статисти-ческий подход. Для полного статистичес-кого описания гидродинамических полей в турбулентном потоке необходимо иметь все многомерные совместные рас-пределения вероятностей для этих полей в пространстве и времени. Но опреде-ление этих распределений является очень сложной проблемой, к тому же эти рас-пределения сами по себе часто неудобны для применения из-за своей неуклюжес-ти. Вследствие

на соответствующий оператор

$$\left\langle Q \middle| \hat{A}^B(x)\partial_{y\nu}\hat{F}^{B\mu\nu}(y) \middle| Q \right\rangle = 0. \tag{5}$$

Но это уравнение содержит функции Грина следующих порядков и так далее до бесконечности. Таким образом, повто-ряя эти шаги бесконечное число раз мы получаем бесконечную систему уравнений для всех функций Грина

$$\begin{aligned} &\left\langle Q \middle| \hat{A}^B(x_1)\mathrm{Eq.} \middle| Q \right\rangle = 0, \\ &\left\langle Q \middle| \hat{A}^B(x_1)A^B(x_2)\mathrm{Eq.} \middle| Q \right\rangle = 0, \\ &\cdots \\ &\left\langle Q \middle| \hat{A}^B(x_1)\cdots A^B(x_n)\mathrm{Eq.} \middle| Q \right\rangle = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

Эти уравнения являются основными уравнениями в непер-турбативной квантовой теории поля.

Такая система бесконечных дифференциальных уравнений не может быть решена аналитически и поэтому необходимо использовать какие-либо приближенные способы для того, чтобы обрезать бесконечную систему до конечной.

Один из возможных путей решения уравнений (6)-(8) сле-дующий. Необходимо разложить n-ую функцию Грина

$$G^{B_1,\cdots,B_n}_{\mu_1,\cdots,\mu_n}(x_1,x_2\cdots,x_n) = \left\langle A^{B_1}_{\mu_1}(x_1)\cdots A^{B_n}_{\mu_n}(x_n) \right\rangle$$

как полилинейную комбинацию функций Грина меньших по-рядков

$$\begin{aligned} &G_n(x_1,x_2\cdots,x_n) \approx \\ &G_{n-2}(x_3,x_4\cdots,x_n)\left[G_2(x_1,x_2) - C_2\right] + \\ &(\text{permutations of } x_1,x_2 \text{ with } x_3,x_n) + \\ &G_{n-3}\left[G_3 - C_3\right] + \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

где $C_{2,3\ldots}$ – константы. Таким образом можно обрезать беско-нечную систему уравнений (6)-(8).

Другим путем решения бесконечной системы этого на практике часто используется временное усреднение для турбулентных полей. Нелинейность урав-нений Навье-Стокса приводит к появлению потоков импульса, которые действуют как напряжения во всем потоке. После чего необходимо получить уравнения для этих напряжений, но эти уравнения со-держат дополнительные неизвестные ве-личины и т.д. до бесконечности. Это замечание иллюстрирует проблему замы-кания: т.е. установление достаточного ко-личества уравнений для всех неизвестных кумулянтов (моментов).

Усреденение Рейнольдса

Введем мгновенную скорость $v_i(\vec{x},t)$ как сумму средней скорости $V_i(\vec{x},t)$ и флуктуирующей $v_i^{'}(\vec{x},t)$, так что

$$v_i(\vec{x},t) = V_i(\vec{x},t) + v_i^{'}(\vec{x},t) \tag{9}$$

После усреднения уравнения (3) по-лучаем

$$\rho\frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu S_{ji} - \overline{\rho v_j^{'} v_i^{'}}\right) \tag{10}$$

Уравнение (10) называется Рейнольдс-усредненное уравнение Навье-Стокса. Величина $\overline{\rho v_j^{'} v_i^{'}}$ называется тензором на-пряжений Рейнольдса и обозначается как

уравнений (6)-(8) может являться выбор некоторого функционала (напри-мер, действия или глюонного конденсата в квантовой хромо-динамике [8]), в котором все физические величины выра-жаются через функции Грина соответствующих порядков. После чего необходимо использовать некоторое физическое предположение для того, чтобы выразить более высокие функции Грина через функции Грина более низких порядков (например (13)). В результате мы будем иметь некоторый функционал, который можно использовать для получения соответствующих уравнений Эйлера-Лагранжа.	$$\tau_{ij} = -\rho\overline{v_i' v_j'}. \qquad (11)$$ Мы видим, что в этом случае появ-ляются дополнительные 6 неизвестных величин τ_{ij} вследствие усреднения Рей-нольдса. Необходимо отметить, что мы не получили дополнительных уравнений для этих величин. Эти неизвестные вели-чины появляются дополнительно к перво-начальным неизвестным: усредненные давление p и компоненты скорости v_i .

Сравнивая левую и правую колонки, мы видим, что процедура получения случаях бесконечных систем уравнений в обоих случаях практически одна и таже. Разница состоит только в том, что в первом случае мы усредняем квантовые поля, а во втором случае – статистические турбулентные поля.

2. Константа связи в квантовой теории поля и число Рейнольдса

Выше мы показали, что процедуры непертурбативного квантования и моделирования турбулентности имеют много общего. В этом параграфе мы хотим показать, что имеется нечто общее между планковской константой, числом Рейнольдса и константой связи в квантовй теории поля (здесь мы следуем [3]).

В статье [3] найдено интересное переплетение между константой связи в квантовой теори поля и числом Рейнольдса в гидродинамике.

Квантовая хромодинамика	**Гидродинамика**
В квантовой теории поля имеется пертурбативный режим, в кото-ром безразмерная константа связи $$\alpha^2 = \frac{1/\tilde{g}^2}{\hbar c} \qquad (15)$$ достаточно мала $\alpha^2 < 1$, тогда как в непертурбативном	Как известно, поведение по-тока жидкости зависит от числа Рейнольдса Re $$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\mu} \qquad (16)$$ где l – характеристическая длина данного потока. Если

режиме $\alpha^2 \geq 1$ (здесь $\tilde{g}$ – размерная константа связи, $\hbar$ планковская константа, c – скорость света). Например, постоянная тонкой структуры в квантовой электродинамике $\alpha^2 = e^2/\hbar c \approx 1/137$ (e – заряд электрона); $\alpha^2 \approx 0.1$ для слабого взаимодействия и $\alpha^2 \geq 1$ для сильного взаимодействия. В квантовой теории поля открытой проблемой является проблема непертурбативного квантования для $\alpha^2 \geq 1$.	Re < Re_{cr}, то движение ламинарное, если Re > Re_{cr}, то движение турбулентное.

Если переписать уравнение (16) как

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v^2 l^4}{\mu l^3 v}, \tag{17}$$

то можно записать следующие размерные равенства: $\left[\rho v^2 l^4\right] = \left[1/\tilde{g}^2\right] = g \cdot cm^3/s^2$, $[\hbar] = \left[\mu l^3\right] = g \cdot cm^3/s$. Это позволяет предложить следующие соотношения

$$\begin{aligned} &1/\tilde{g}^2 \leftrightarrow \rho v^2 l^4, \\ &\hbar \leftrightarrow \mu l^3, \end{aligned} \tag{18}$$

что в свою очередь позволяет сделать следующие аналогии:

- $\alpha^2 \leftrightarrow \mathrm{Re}$.
- $\hbar = 0 \leftrightarrow \mu = 0$. В этом случае классическая теория соответствует идеальной жидкости.
- $\hbar \neq 0$ and $\alpha^2 < 1 \leftrightarrow \mu \neq 0$ and $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$. В этом случае ламинарное течение соответствует пер-турбативному режиму в квантовой теории поля.
- $\hbar \neq 0$ and $\alpha^2 \geq 1 \leftrightarrow \mu \neq 0$ and $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$. В этом случае турбулентное течение соответствует не-пертурбативному режиму в квантовой теории поля.

3. Обсуждение. Таким образом, мы показали, что бесконечная система дифференциальных уравнений (либо для функций Грина (6)-(8), либо для кумулянтов (10)-(14)) является общей математической основой для непертурбативного квантования и моделирования турбулентности. Главная проблема при решении этих уравнений является проблема замыкания: обрезание бесконечной системы уравнений. Для такого обрезания необходимы какие-либо физические аргументы. Например, приближение 2-х скалярных полей в квантовой хромодинамике [4] или алгебраические модели, модель одного/двух уравнений, модель замыкания 2-ого порядка при моделировании турбулентности.

Существенным отличием непертурбативного квантования от турбулентности является то, что уравнения (6)-(8) являются эквивалентными операторному уравнению (2), тогда как для турбулентности это не так.

Необходимо отметить, что такого рода обрезание может приводить к физически некорректным резуль-татам (отрицательные значения положительно определенных величин: плотности вероятности, дисперсии, рассеяние энергии и т.д.). Это происходит из-за того, что при ограничении конечным числом кумулянтов, строго говоря, плотность вероятности может и не существовать. Это тесно связано с недопустимостью произвольного обрезания ряда Тэйлора характеристической функции.

Отметим также, что в некоторых случаях квантовая хромодинамика ведет себя подобно идеальной жидкости [5, 6].

В заключение я хочу выразить благодарность финансовой поддержке гранту №1626/ГФ3 МОН РК.

ЛИТЕРАТУРА

1 Heisenberg W. Introduction to the unified field theory of elementary particles. – Max-Planck-Institut fuer Physik und Astrophysik, Interscience Publishers London. – New York: Sydney, 1966.

2 Wilcox David C., Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries. – Inc. La Canada. – California, 1994.

3 Dzhunushaliev V. Flux tube in turbulent flow and quantum chromodynamics // AMCOS. – Vol. 1. – Issue 1, 2010. – arXiv:0907.3624 [physics.flu-dyn].

4 Dzhunushaliev V. SU(3) glueball gluon condensate // [arXiv:1110.1427 [hep-ph]].

5 Zakharov V.I. Gluon condensate and beyond // Int. J. Mod. Phys. A 14, 4865 (1999).

6 Torrieri G. Viscosity of An Ideal Relativistic Quantum Fluid: A Perturbative study // Phys. Rev. D 85, 065006 (2012).

REFERENCES

1 Heisenberg W. Introduction to the unified field theory of elementary particles. – Max-Planck-Institut fuer Physik und Astrophysik, Interscience Publishers London. – New York: Sydney, 1966.

2 Wilcox David C., Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries. – Inc. La Canada. – California, 1994.

3 Dzhunushaliev V. Flux tube in turbulent flow and quantum chromodynamics // AMCOS. – Vol. 1. – Issue 1, 2010. – arXiv:0907.3624 [physics.flu-dyn].

4 Dzhunushaliev V. SU(3) glueball gluon condensate // [arXiv:1110.1427 [hep-ph]].

5 Zakharov V.I. Gluon condensate and beyond // Int. J. Mod. Phys. A 14, 4865 (1999).

6 Torrieri G. Viscosity of An Ideal Relativistic Quantum Fluid: A Perturbative study // Phys. Rev. D 85, 065006 (2012).

Резюме

В. Жүнісәлиев

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

ПЕРТУРБАТИВТІ ЕМЕС КВАНТТАУ ЖӘНЕ ТУРБУЛЕНТТІК: САЛЫСТЫРУ

Пертурбактивті емес кванттық өріс теориясы және турбуленттік теориясындағы есептеу әдістерін са-лыстыру жүргізіледі. Негізгі нәтиже – екі жағдайда да шексіз теңдеулер жүйесі бар, бірінші жағдайда Грин функциясы үшін, екінші жағдайда кумулянттар үшін. Ол пертурбактивті емес кванттық өріс теориясы және турбуленттік үлгілеуде ұқсас математикалық әдістерді қолдануға мүмкіндік береді. Грин функциясы және кумулянттар үшін шексіз дифференциалдық теңдеулер жүйесінің тұйықталу мәселесі талқыланады.

Кілт сөздер: пертурбативті емес кванттау, турбуленттік.

Summary

V. Dzhunushaliev

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty)

NONPERTURBATIVE QUANTIZATION AND TURBULENCE: THE COMPARISON

The comparison of calculations methods in nonperturbative quantum fields theory and turbulence theory is made. The main result is that in both cases there is an infinite equations set. In the first case it is the equations set for Green's functions and in the second case it is the equations set for cumulants. It allows us to use similar mathematical methods to solve problems in nonperturbative quantum field theory and turbulence modeling. A closure problem of truncation of the infinite equations set is discussed.

Keywords: nonperturbative quantization, turbulence.

Поступила 15.04.2013г.