УДК 539.3

А.К. ЕГОРОВ, М.А. БАЙМУХАМЕТОВ, Д. ДЖУМАГУЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ АЗИМУТАЛЬНЫХ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕФТЕПРОВОДА В ИДЕАЛЬНО ЖИДКОЙ СРЕДЕ

(Представлена академиком Б.Р. Ракишевым)

Исследованы азимутальные формы потери устойчивости нефтепровода в идеально жидкой среде. Проблема устойчивости решена методом Лейбензона-Ишлинского в условиях плоской деформации с учетом того, что давление со стороны ламинарно текущей в нефтепроводе нефти на внутреннюю его поверхность линейно меняется вдоль оси нефтепровода. Учтены касательные напряжения, действующие на внутреннюю поверхность нефтепровода, а также давление жидкой среды на внешнюю его поверхность. Получено характеристическое уравнение для определения критических параметров.

Для решения этой проблемы воспользуемся методом Лейбензона–Ишлинского [1,2]. Она может быть решена в условиях плоской деформации, однако с учётом того, что давление со стороны ламинарно текущей в горизонтально расположенном нефтепроводе нефти на внутреннюю его поверхность линейно меняется вдоль оси нефтепровода. Учитывается также взаимосвязь коэффициента при указанном давлении с касательными напряжениями на внутренней поверхности нефтепровода [3].

Возмущения найдём в полярных координатах r,θ путём решения дифференциальных уравнений в напряжениях:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r}=0, \tag{1}$$

где σ_r, σ_θ, $\sigma_{r\theta}$ – компоненты возмущений напряжений. Должно также быть удовлетворено уравнение совместности:

$$\nabla^2(\sigma_r+\sigma_\theta)=0 \tag{2}$$

при соответствующих граничных условиях. Здесь ∇^2 – оператор Лапласа.

Для решения воспользуемся функцией напряжений вида:

$$\varphi=\sum_{n=2}^{\infty}\left(A_n r^{n+2}+B_n r^n+C_n r^{-n+2}+D_n r^{-n}\right)\sin n\theta, \tag{3}$$

где A_n, B_n, C_n, D_n – произвольные постоянные интегрирования, n – целое число.

Тогда получим:

$$\sigma_r=\sum_{n=2}^{\infty}[A_n(1+n)(2-n)r^n+B_n n(1-n)r^{n-2}+$$
$$+C_n(2+n)(1-n)r^{-n}-D_n n(1+n)r^{-n-2}]\sin n\theta,$$
$$\sigma_\theta=\sum_{n=2}^{\infty}[A_n(2+n)(1+n)r^n-B_n n(1-n)r^{n-2}+$$
$$+C_n(2-n)(1-n)r^{-n}+D_n n(1+n)r^{-n-2}]\sin n\theta,$$
$$\sigma_{r\theta}=\sum_{n=2}^{\infty}[-A_n n(1+n)r^n+B_n n(1-n)r^{n-2}-$$
$$-C_n n(1-n)r^{-n}+D_n n(1+n)r^{-n-2}]\cos n\theta. \tag{4}$$

Подставляя эти величины в соотношения закона Гука:

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E_1}(\sigma_r-\nu_1\sigma_\theta),\ \varepsilon_\theta=\frac{1}{E_1}(\sigma_\theta-\nu_1\sigma_r),$$
$$\gamma_{r\theta}=\frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\sigma_{r\theta}, \tag{5}$$

где

$$E_1=\frac{E}{1-\nu^2},\ \nu_1=\frac{\nu}{1-\nu}, \tag{6}$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, и принимая во внимание уравнения Коши, найдём

$$u_1=\sum_{n=2}^{\infty}[A_n Rr^{n+1}-B_n Qr^{n-1}+C_n \mathrm{Pr}^{-n+1}+D_n Qr^{-n-1}]\sin n\theta,$$
$$u_2=\sum_{n=2}^{\infty}[A_n Nr^{n+1}-B_n Qr^{n-1}+C_n Mr^{-n+1}-D_n Qr^{-n-1}]\cos n\theta \tag{7}$$

Здесь u_1, u_2 – компоненты возмущений перемещений, при этом введены обозначения:

$$P=\frac{n+2-\nu_1(2-n)}{E_1},\ Q=\frac{n(1+\nu_1)}{E_1},\ M=\frac{4-n(1+\nu_1)}{E_1},$$

$$N=-\frac{4+n(1+\nu_1)}{E_1},\ R=\frac{2-n-\nu_1(n+2)}{E_1}. \quad (8)$$

Сформулируем граничные условия упругой устойчивости в соответствии с методом Лейбензона-Ишлинского на внешней $r=r_0$ и внутренней $r=r_1$ границах нефтепровода в случае азимутальных деформаций.

В результате потери устойчивости нефтепроводом первоначальные круговые границы принимают форму, отличную от круговой вследствие поворотов граничных элементов [1,2]. Иначе говоря, в возмущённом состоянии первоначально круговая форма границы переходит в бесконечно близкие к ней возмущённые формы. При этом орты $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, характеризующие границу в первоначальном состоянии, переходят в единичные векторы $\bar{e}_1^*$, $\bar{e}_2^*$, характеризующие границу в возмущённом состоянии.

Направляющие косинусы углов между соответствующими единичными векторами представим в таблице 1 [4].

Таблица 1. **Направляющие косинусы**

	$\bar{e}_1^*$	$\bar{e}_2^*$
$\bar{e}_1$	1	$\frac{1}{2}e_{12}-\omega_3$
$\bar{e}_2$	$\frac{1}{2}e_{12}+\omega_3$	1

Здесь в произвольной ортогональной системе координат

$$e_{12}=\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{u_2}{H_2}\right)+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u_1}{H_1}\right),$$

$$\omega_3=\frac{1}{2H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(H_2u_2)-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(H_1u_1)\right], \quad (9)$$

где H_1, H_2 – коэффициенты Ламе, α_1, α_2 – криволинейные координаты.

В нашем случае

$$H_1=H_r=1,\ H_2=H_\theta=r,\ \alpha_1=r,\ \alpha_2=\theta,\ \bar{e}_1^*=\bar{e}_r^*,$$

$$\bar{e}_2^*=\bar{e}_\theta^*,\ \bar{e}_1=\bar{e}_r,\ \bar{e}_2=\bar{e}_\theta,\ u_1=u_r,\ u_2=u_\theta. \quad (10)$$

С учетом (9), (10) и выражений в таблице 1 получаем выражения для направляющих косинусов:

$$\cos(\bar{e}_1,\bar{e}_1^*)=l_1=1,\ \cos(\bar{e}_1,\bar{e}_2^*)=m_1=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}-u_2\right),$$

$$\cos(\bar{e}_2,\bar{e}_1^*)=l_2=\frac{\partial u_2}{\partial r},\ \cos(\bar{e}_2,\bar{e}_2^*)=m_2=1. \quad (11)$$

Пусть на внешних границах цилиндрической трубы действуют напряжения $[\sigma_r]$, $[\sigma_{r\theta}]$. Вектор напряжения в возмущённом состоянии запишем в виде:

$$\bar{F}=[\sigma_r]\bar{e}_1^*+[\sigma_{r\theta}]\bar{e}_2^*. \quad (12)$$

Проекции $\bar{F}$ на первоначальные орты $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ будут:

$$F_1=(\bar{F}\cdot\bar{e}_1)=[\sigma_r](\bar{e}_1^*\cdot\bar{e}_1)+[\sigma_{r\theta}](\bar{e}_2^*\cdot\bar{e}_1)=[\sigma_r]+$$

$$+[\sigma_{r\theta}]\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}-u_2\right), \quad (13)$$

$$F_2=(\bar{F}\cdot\bar{e}_2)=[\sigma_r](\bar{e}_1^*\cdot\bar{e}_2)+[\sigma_{r\theta}](\bar{e}_2^*\cdot\bar{e}_2)=$$

$$=[\sigma_r]\frac{\partial u_2}{\partial r}+[\sigma_{r\theta}], \quad (14)$$

где

$$(\bar{e}_1^*\cdot\bar{e}_1)=l_1=1,\ (\bar{e}_2^*\cdot\bar{e}_1)=m_1=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}-u_2\right),$$

$$(\bar{e}_1^*\cdot\bar{e}_2)=l_2=\frac{\partial u_2}{\partial r},\ (\bar{e}_2^*\cdot\bar{e}_2)=m_2=1 \quad (15)$$

– скалярные произведения единичных векторов, представляющие собой соответствующие направляющие косинусы.

Граничные условия в возмущённом состоянии запишем в виде:

$$\sigma_r^*l_1+\sigma_{r\theta}^*l_2=F_1,\ \sigma_{r\theta}^*l_1+\sigma_\theta^*l_2=F_2, \quad (16)$$

или, с учётом (11), (13), –

$$\sigma_r^*+\sigma_{r\theta}^*\frac{\partial u_2}{\partial r}=[\sigma_r]+[\sigma_{r\theta}]\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}-u_2\right),$$

$$\sigma_{r\theta}^*+\sigma_\theta^*\frac{\partial u_2}{\partial r}=[\sigma_r]\frac{\partial u_2}{\partial r}+[\sigma_{r\theta}], \quad (17)$$

где σ_r^*, $\sigma_{r\theta}^*$, σ_θ^* – напряжения в возмущённом состоянии.

Разложим эти напряжения в малой окрестности границы в ряды. Удерживая малые величины до первого порядка малости включительно, получим:

$$\sigma_{ij}^{*} = \sigma_{ij}^{0} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{0}}{\partial r} u_1 + \sigma_{ij}, \ (i, j = 1,2), \qquad (18)$$

где «нуликом» отмечены величины основного (предкритического) состояния, найденные в [3], а возмущения не отмечены никаким индексом и получены выше в настоящей работе.

С учетом (18) из (17) получаем:

$$\sigma_r^0 + \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} u_1 + \sigma_r + (\sigma_{r\theta}^0 + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^0}{\partial r} u_1 + \sigma_{r\theta}) \frac{\partial u_2}{\partial r} =$$

$$= [\sigma_r] + [\sigma_{r\theta}] \frac{1}{r} (\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - u_2), \qquad (19)$$

$$\sigma_{r\theta}^0 + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^0}{\partial r} u_1 + \sigma_{r\theta} + (\sigma_\theta^0 + \frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial r} u_1 + \sigma_\theta) \frac{\partial u_2}{\partial r} =$$

$$= [\sigma_r] \frac{\partial u_2}{\partial r} + [\sigma_{r\theta}]. \qquad (20)$$

Так как в нашем случае на внешней границе горизонтально расположенного нефтепровода, то-есть при $r = r_0$:

$$[\sigma_r] = \sigma_r^0 = -q_0, \ [\sigma_{r\theta}] = \sigma_{r\theta}^0 = 0, \qquad (21)$$

то из (19), (20) следуют условия устойчивости на внешней границе, с учётом малых величин до первого порядка малости:

$$\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} u_1 = 0, \ \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^0}{\partial r} u_1 + (\sigma_\theta^0 + q_0) \frac{\partial u_2}{\partial r} = 0, \text{при}$$

$$r = r_0. \qquad (22)$$

На внутренней границе нефтепровода при $r = r_1$:

$$[\sigma_r] = \sigma_r^0 = -q_1 \xi, \ [\sigma_{r\theta}] = \sigma_{r\theta}^0 = 0, \text{ где } \xi = \frac{z}{r_0}, \qquad (23)$$

z – ось нефтепровода, и из (19), (20) следуют граничные условия устойчивости:

$$\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} u_1 = 0, \quad \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^0}{\partial r} u_1 + (\sigma_\theta^0 + q_1 \xi) \frac{\partial u_2}{\partial r} = 0,$$

$$\text{при } r = r_1. \qquad (24)$$

Приведем выражения для величин основного состояния, входящих в граничные условия устойчивости (22), (24).

Напряжения [5]:

$$\sigma_r^0 = 2G\xi \left[3A + \frac{B}{x^2} + C(4\nu + 1) + \frac{D}{x^2} \right] - \frac{(x^2 - x_1^2) q_0}{(1 - x_1^2) x^2},$$

$$\sigma_\theta^0 = 2G\xi \left[3A - \frac{B}{x^2} + C(4\nu + 1) - \frac{D}{x^2} \right] - \frac{(x^2 + x_1^2) q_0}{(1 - x_1^2) x^2}, \qquad (25)$$

$$\sigma_{r\theta}^0 = 0,$$

где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона,

$$x = \frac{r}{r_0}, \ \xi = \frac{z}{r_0}, \quad \frac{r_1}{r_0} = x_1 \le x \le 1, \ 0 \le \xi \le L = \frac{l}{r_0}, \qquad (26)$$

l – длина трубы. Значения произвольных постоянных интегрирования имеют вид:

$$A = -\frac{x_1 [q_1 (1 - 2\nu) x_1 + \tau_1 (4\nu + 1)]}{12(1 + \nu)(x_1^2 - 1) G}, \ B = \frac{x_1 [q_1 (1 - 2\nu) x_1 - \tau_1]}{4(1 - \nu)(x_1^2 - 1) G},$$

$$C = \frac{x_1 (-q_1 x_1 + \tau_1)}{4(1 + \nu)(x_1^2 - 1) G}, \ D = \frac{x_1 (q_1 x_1 + \tau_1)}{4(1 - \nu)(x_1^2 - 1) G}, \qquad (27)$$

где [3]

$$\tau_1 = \frac{q x_1}{2} \qquad (28)$$

– касательные напряжения на внутренней границе нефтепровода в основном состоянии.

Для нахождения производной $\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r}$ представим (25) с учётом (26) в виде:

$$\sigma_r^0 = 2G\xi [3A + \frac{B r_0^2}{r^2} + C(4\nu + 1) + \frac{D r_0^2}{r^2}] - \frac{(r^2 - x_1^2 r_0^2) q_0}{(1 - x_1^2) r^2}. \qquad (29)$$

Тогда

$$\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} = -4G\xi (B + D) \frac{r_0^2}{r^3}. \qquad (30)$$

и

$$\left(\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} \right)\Bigg|_{r = r_0} = -\frac{4G\xi (B + D)}{r_0}. \qquad (31)$$

Производная $\frac{\partial \sigma_{r\theta}^0}{\partial r} = 0$ всюду, так как всюду $\sigma_{r\theta}^0 = 0$.

Запишем при $r = r_0$, то-есть при $x = 1$

$$\sigma_\theta^0 + q_0 = 2G\xi [3A - B + C(4\nu + 1) - D] - \frac{(1 + x_1^2) q_0}{(1 - x_1^2)} + q_0. \qquad (32)$$

Производная

$$\left(\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} \right)\Bigg|_{r = r1} = -4G\xi (B + D) \frac{r_0^2}{r_1^3}. \qquad (33)$$

Наконец, при $r = r_1$:

$$\sigma_\theta^0 + q_1 \xi = 2G\xi [3A - \frac{B}{x_1^2} + C(4\nu + 1) - \frac{D}{x_1^2}] - \frac{2q_0}{1 - x_1^2} + q_1 \xi. \qquad (34)$$

Подставляя в граничные условия устойчивости (22), (24) величины возмущений, найденные выше в настоящей работе, то есть (4)–(8), и величины основного состояния (25)–(34), получаем систему четырёх однородных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными – про-

извольными постоянными интегрирования. Нетривиальное (ненулевое) решение этой системы будет иметь место при равенстве нулю её определителя, называемого характеристическим. При этом хотя бы одна из произвольных постоянных должна быть отличной от нуля. В результате этого происходит потеря устойчивости. Из характеристического уравнения находим значения критических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л.С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочки // Собр. трудов. Изд. АН СССР. М., 1951.Т.1. 468 с.

2. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. журн. 1954. Т.4. №2. С. 140-146.

3. *Егоров А.К., Муханбеткалиев К.И.* Динамическая устойчивость деформирования нефтепровода с отложениями. Алматы, 2001. 140 с.

4. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат. М., 1948. 211 с.

5. *Лурье А.И.* Теория упругости. М., 1970. 939 с.

Резюме

Идеалды сұйық ортада мұнай құбыры тұрақтылығын жоғалтуының азимуталды пішіні зерттелді. Жазық деформация шартында тұрақтылық мәселесі мұнай құбырындағы ламинарлы ағыстағы мұнай жағынан болатын қысым оның ішкі бетінде мұнай құбырының осін жағалай өзгеретінін есепке ала отырып Лейбензон-Ишлинский әдісімен шешілді. Мұнай құбырының сыртқы бетіне әсер ететін сұйық ортаның қысымы және құбырдың ішкі бетіне әсер ететін тиесілі кернеу ескерілді. Критикалық параметрлерді анықтау үшін сипаттамалық теңдеу алынды.

Summary

Azimuthal forms of loss of stability of an oil pipeline in ideally liquid environment are investigated. The stability problem is decided by a method Leybenzon – Ishlinskiy in the conditions of flat deformation taking into account that pressure from laminar oil flowing in an oil pipeline on its internal surface linearly varies along an oil pipeline axis. The tangents of pressure operating on an internal surface of an oil pipeline are considered, and also pressure of the liquid environment upon its external surface. The characteristic equation for definition of critical parametres is received.

Институт механики и машиноведения имени У.А.Джолдасбекова МОН РК
Атырауский институт нефти и газа, г Атырау

Поступила 02.02.10 г.